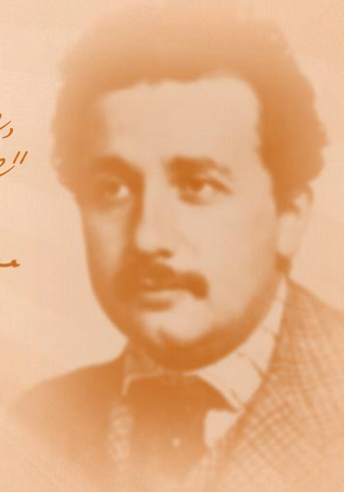
"La joie de contempler et de comprendre,
voilà le langage que me porte la nature"

Albert Einstein



Quelques notions sur la théorie de la

Relativité Restreinte

Patrick Hoffmann - 2018

Les trois parties de l'exposé

"Trois siècles de Physique" : *Galilée, Newton … Maxwell, Lorentz, Poincaré …*
Contradictions entre la mécanique classique et l'électromagnétisme.

Deux articles d'Einstein publiés courant 1905 : "Annus mirabilis" :

"Quantification de la lumière" reçu le 18 mars 1905 :
Annalen der Physik, vol. 17, n° 6, 1905, p. 132–148.

"Sur le mouvement brownien" reçu le 11 mai 1905 :
Annalen der Physik, vol. 17, n° 8, 1905, p. 549–560.

"Electrodynamique des corps en mouvement" reçu le 30 juin 1905 :
Annalen der Physik, vol. 17, n° 10, 1905, p. 891–921.

"Equivalence masse-énergie" reçu le 27 septembre 1905 :
Annalen der Physik, vol. 18, n° 13, 1905, p. 639–641.

"Deuxième article sur le mouvement brownien" mi-décembre 1905,
qui précédera la soutenance de sa thèse de doctorat sur le sujet :
"Une nouvelle détermination des dimensions moléculaires", juillet 1906.

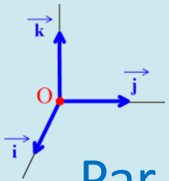
"Espace et temps", 1908 : *Minkowski*.
"Concept d'espace-temps et géométrie de la relativité restreinte"
Conférence du 21 septembre 1908 à Cologne.

La Physique contemporaine

On considère généralement que la Physique actuelle, est née en 1604 avec le manuscrit de Galilée, dans lequel par la méthode expérimentale il établit la loi de la chute des corps, et décrit les phénomènes en langage mathématique.

L'efficacité de cette approche a été soulignée de nos jours par Feynman :
"Nous faisons de la Physique-Mathématique, faute de pouvoir faire mieux… Seules certaines propriétés physiques du monde nous sont accessibles, et la puissance de la Physique vient précisément de ce qu'elle a su limiter ses ambitions aux seules questions qui sont mathématisables".

De nos jours la Physique est définie comme : *"La science, qui développe des représentations du monde expérimentalement vérifiables.*
Ces représentations sont nommées modèles ou théories. La confrontation des théories à l'expérience passe par des séries de mesures. Chaque mesure est toujours associée à un intervalle d'incertitude.
Les modèles sont donc valides dans un certain domaine, et considérés comme pertinents seulement jusqu'à un certain point. Pour de nouveaux faits, ou pour de meilleures précisions dans les séries de mesures, les théories peuvent évoluer ou être complètement remises en cause".



Les référentiels d'inertie

Par définition, dans un tel référentiel (encore nommé galiléen), pour une particule "libre" de toute contrainte, l'espace est homogène et isotrope, pendant que le temps s'écoule de façon uniforme.

Appliquons à l'espace et au temps le théorème de Noether (1915) :
"A toute symétrie correspond une grandeur physique conservative".

L'homogénéité de l'espace engendre la conservation de l'impulsion $\vec{P}$ (quantité de mouvement) et avec l'invariance de la masse vient la conservation de la vitesse : c'est la "loi d'inertie".

$$\vec{P} = \overrightarrow{cst} \text{ , } m = cst \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \overrightarrow{cst}}$$

L'uniformité du temps engendre la conservation de l'énergie cinétique :

$$K = cst$$

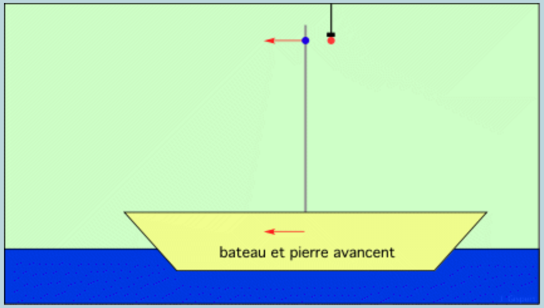
L'isotropie spatiale aboutit à la conservation du moment cinétique. Dans le cas des forces centrales on aboutit à la loi des aires.

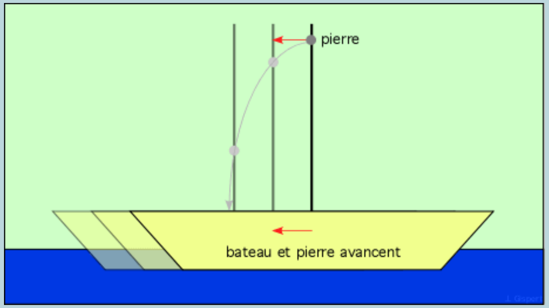
$$\vec{L} = \overrightarrow{cst} \text{ , } m = cst \Rightarrow \text{ forces centrales} \rightarrow \text{loi des aires}$$

Principe de relativité du mouvement

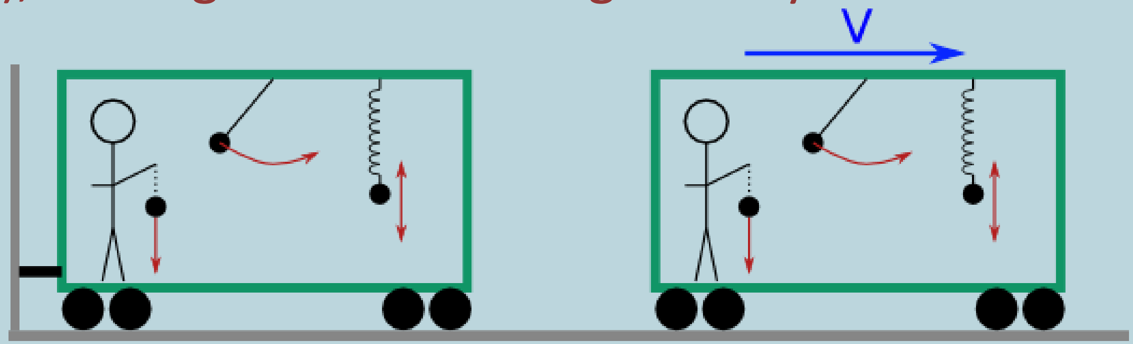
Bruno (1584), "Le banquet des cendres" :

Il est impossible de déceler le mouvement d'un système mécanique par des expériences réalisées à bord de ce système lui-même.





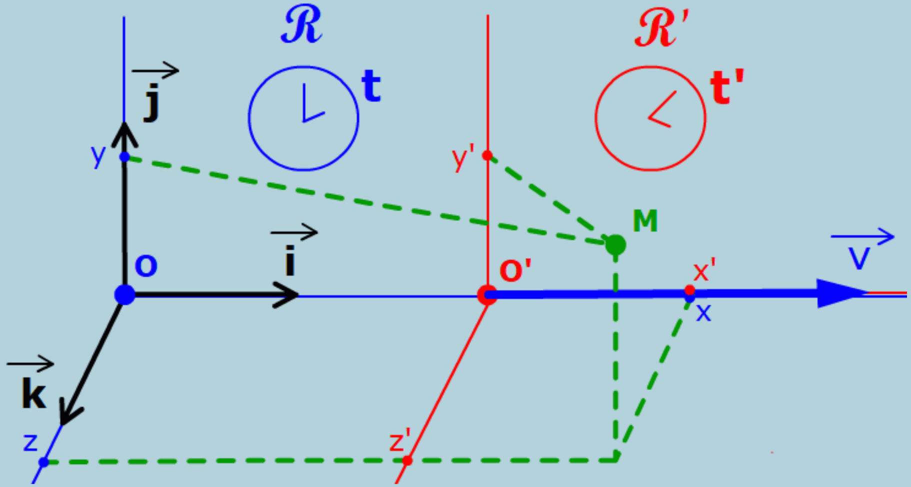
Galilée (1632), "Dialogue sur les deux grands systèmes du monde" :



Aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer le laboratoire immobile de celui en mouvement uniforme.

Les transformations de Galilée

Pour 2 référentiels d'inertie : $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de vitesse relative $\vec{v}$,



des transformations de Galilée :

$$\boxed{\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}}$$

avec : $\vec{r} \overset{\text{def}}{=} x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\vec{r}\,' \overset{\text{def}}{=} x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$

$\overrightarrow{W} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\overrightarrow{W}' \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt'}$, on déduit alors la loi l'addition des vitesses : $\boxed{\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}' + \vec{v}}$

Toutes les lois de la dynamique de Newton (1687), restent covariantes, comme par exemple la loi fondamentale :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \overset{m\,=\,\text{cst}}{\Rightarrow} \vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\,\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}' = m\,\vec{a}\,'}$$

Equations des champs électromagnétiques

Maxwell (1863), partant des théorèmes intégraux, établit les équations locales, des champs électromagnétiques introduits par Faraday (1835) :

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} \\[2ex] \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{B} - \dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \end{cases}}$$

Lorsque les distributions des charges et des courants sont nulles, les équations de Maxwell engendrent deux équations des ondes :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} \square \vec{E} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} \square \vec{B} = 0$$

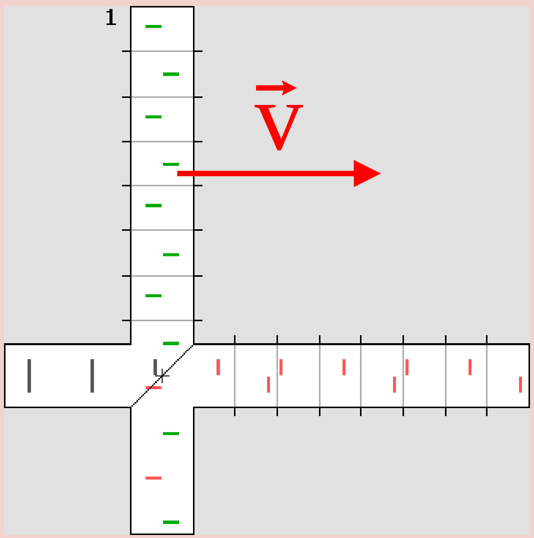
La valeur de leur célérité $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}}$, est égale à la vitesse de la lumière.

Pour les transformations de Galilée, ces relations ne sont pas covariantes !

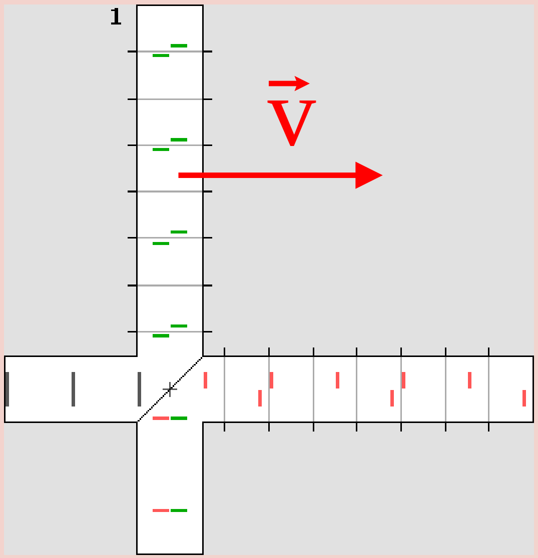
Vitesse de la lumière

Voulant mettre en évidence le mouvement de la terre dans l'éther, Michelson-Morley (1881-1887) constatent que la vitesse de la lumière est identique pour tout référentiel d'inertie.

Résultats attendus :



Résultats mesurés :



www.collectionscanada.gc.ca/eppp-archive/100/200/300/gabriel_lafreniere/

La vitesse dans "l'éther luminifère" étant v, la loi d'addition des vitesses de Galilée n'est plus vérifiée :

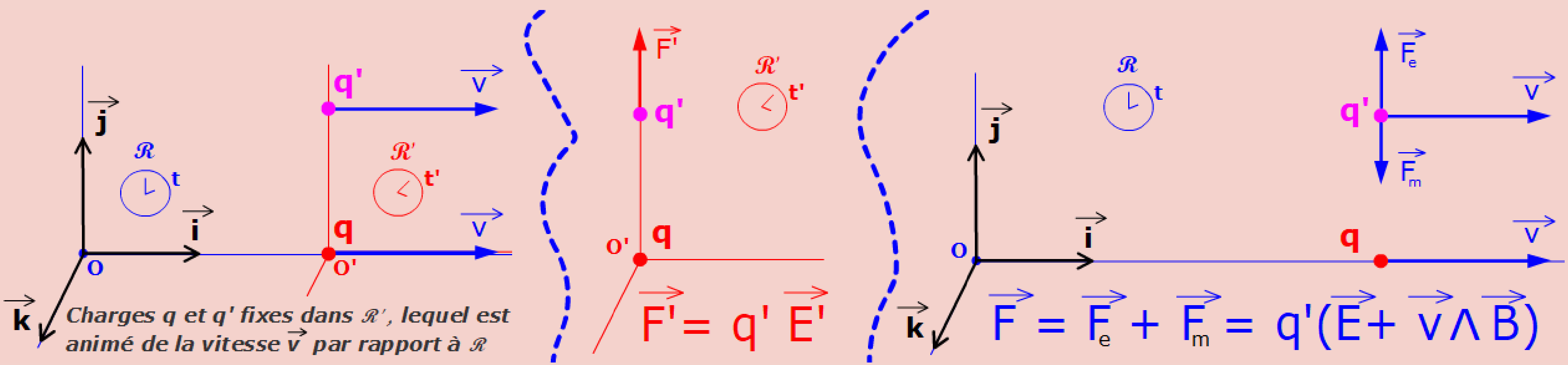
$$\boxed{c = cst} \quad \Rightarrow \quad c + v = c \quad !??...$$

Equations de l'électromagnétisme

Après les équations de Maxwell (1863), la théorie électromagnétique est achevée avec l'expression de la force de Lorentz (1895), "la force qui s'exerce sur une charge q en fonction des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ locaux et de la vitesse $\vec{v}$ de la charge" :

$$\boxed{\vec{F}_q = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

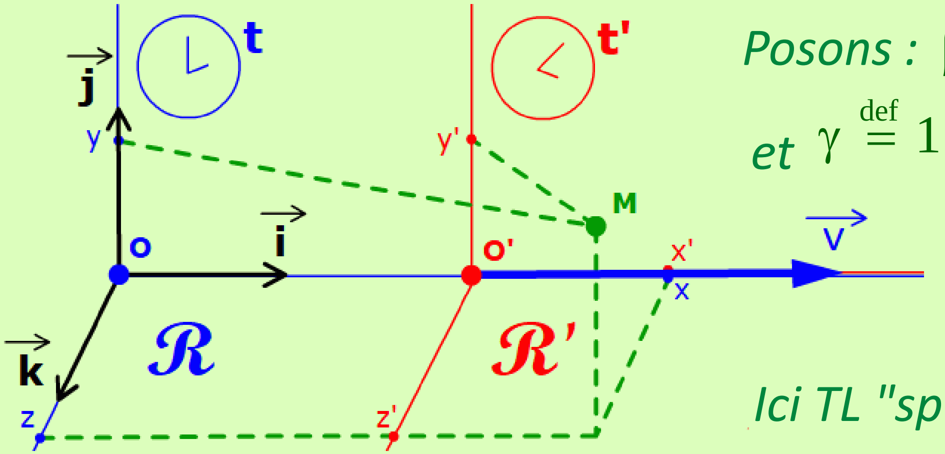
Deux charges q et q' "fixées" dans le référentiel $\mathcal{R}'$, sont décrites par la loi de Coulomb. Les mêmes charges observées dans $\mathcal{R}$ nécessite l'introduction d'un terme supplémentaire dépendant de la vitesse !



Le principe de Relativité de Galilée ne s'applique pas à l'électromagnétisme !

Les Transformations de Lorentz

Empiriquement, Voigt (1887), Fitzgerald (1889), Lorentz (1892, 1899, 1904) et enfin Poincaré (5 juin 1905), aboutissent aux Transformations de Lorentz (TL), qui rendent covariantes toutes les lois de l'électromagnétisme



Posons : $\beta \overset{\text{def}}{=} v/c$

et $\gamma \overset{\text{def}}{=} 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$

Ici TL "spéciales" ➔

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

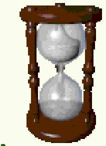
Si $v \ll c \;\Rightarrow\; \beta \to 0 \;\Rightarrow\; \gamma \to 1$: redonne les transformations de Galilée.

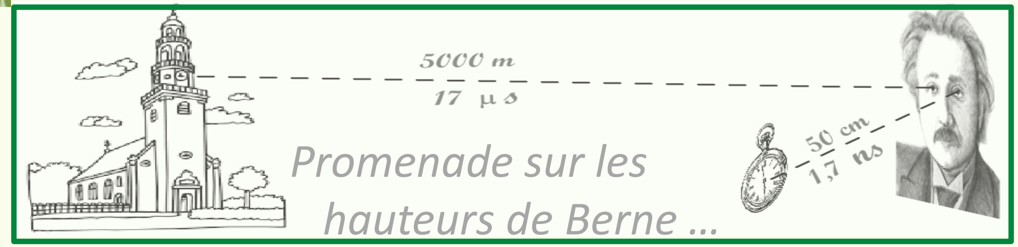
La conjecture de Poincaré (1904) : le Principe de relativité pour toutes les lois physiques dans un référentiel d'inertie, est alors vérifié avec les TL !

Poincaré remarque que les TL forment un groupe et identifie plusieurs invariants fondamentaux ; mais semble conserver le référentiel de l'éther et considérer que celui-ci agit réellement sur les systèmes physiques ➔TL.

Poincaré ne remettra jamais en cause les concepts de temps et d'espace.

Le temps en physique ?

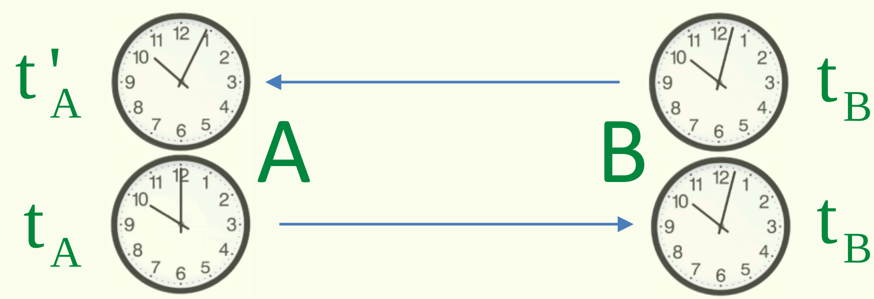




Einstein à Besso (mai 1905) : "*Comment synchroniser ma montre à l'horloge éloignée?*"

Einstein (30 juin 1905) : Un train arrive a 7 h, signifie que la tête du train passe tout près de la montre, lorsque celle-ci simultanément, indique 7h.

Dans un référentiel d'inertie il faut synchroniser toutes les horloges. Pour 2 horloges en A et B du référentiel, un rayon lumineux fait le trajet A → B , puis B → A.



(procédure de Poincaré-Einstein)

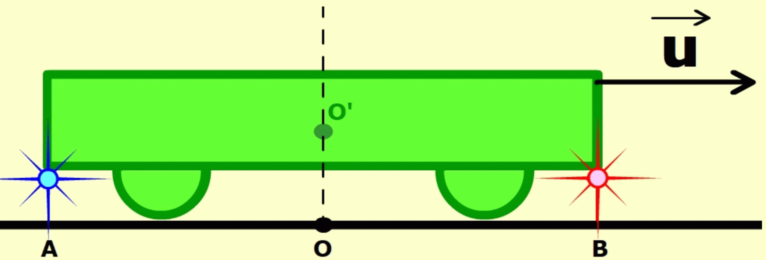
Horloges A et B sont synchronisées si :

$$\boxed{t_B - t_A = t'_A - t_B}$$

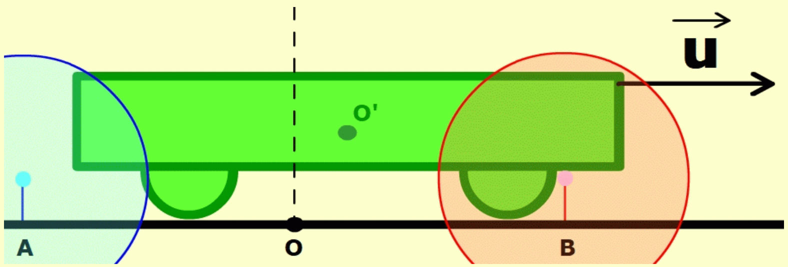
(Idée confortée si la vitesse du signal : c = cst)

La simultanéité des corps en mouvement

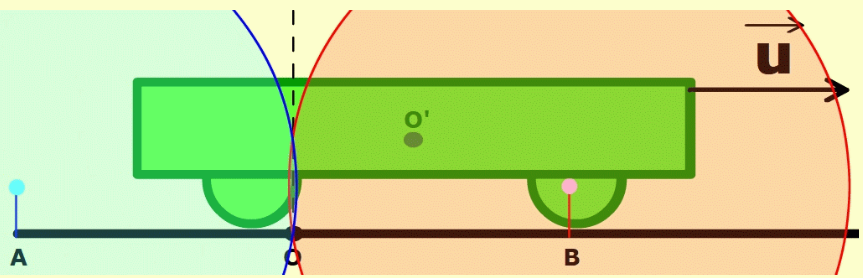
Il faut maintenant synchroniser des référentiels en mouvements uniformes. En sachant que l'émission et la réception d'un signal sont 2 évènements différents puisque $c < \infty$. Avec deux signaux émis simultanément du quai :



Un wagon se déplace à la vitesse **u** par rapport au quai. Les flashs lumineux sont émis au passage des extrémités du wagon devant les points A et B.



Un peu plus tard le wagon ayant avancé, les rayons de lumière se sont propagés mais aucun des observateurs O et O' ne les a encore perçus.



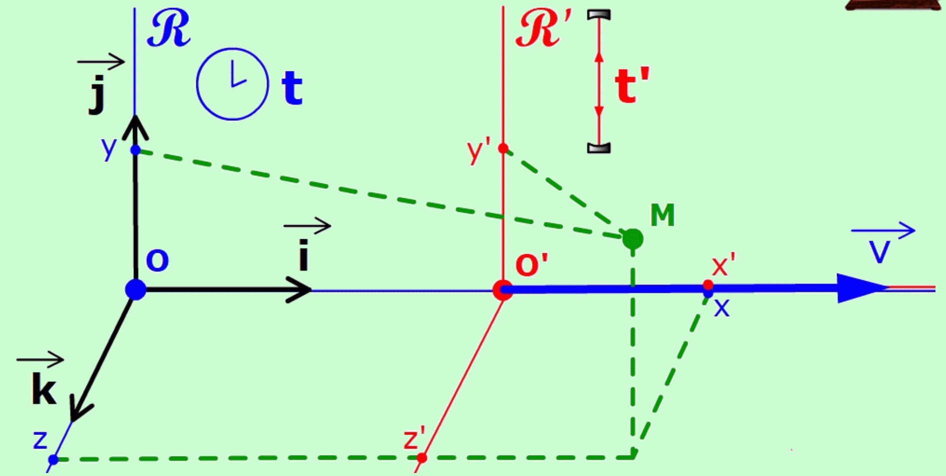
Enfin l'observateur O reçoit les 2 signaux rouge et bleu simultanément. Mais pour O' qui a déjà reçu le signal rouge, ils ne seront plus simultanés.

La simultanéité de 2 évènements n'est pas absolue !...

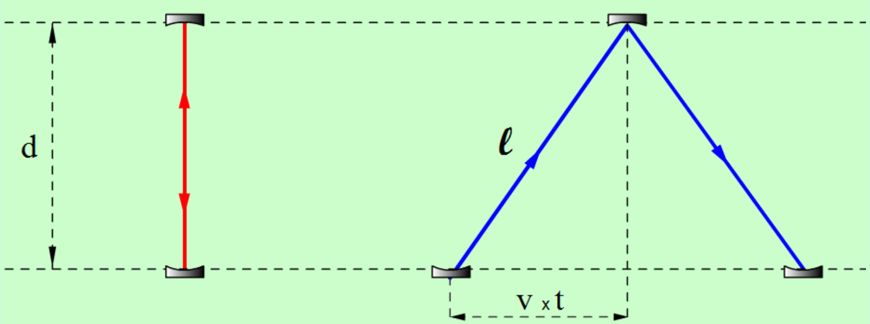
(Elle dépend du référentiel d'inertie de l'observateur)

Mesures des durées

La durée mesurée dans un référentiel lié à l'horloge est la durée propre : t_0 .



Dans $\mathcal{R}$' l'horloge-lumière a pour demi-période : $t' = d / c \overset{\text{def}}{=} t_0$.



Trajet de la lumière dans le repère $\mathcal{R}$' lié aux miroirs

Trajet de la lumière dans le repère $\mathcal{R}$ de l'observateur

Dans $\mathcal{R}$ la demi-période vaut :

$$t = \ell / c = \sqrt{d^2 + v^2 t^2} \; / \; c$$

$$= \sqrt{c^2 \; t_0^2 + v^2 t^2} \; / \; c = \sqrt{t_0^2 + t^2 v^2 / c^2}$$

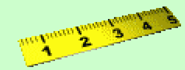
En posant : $\gamma \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow t = \gamma \, t_0 \Rightarrow \boxed{t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \Rightarrow t \geq t_0$

Pour l'observateur "fixe", la durée dans le référentiel "mobile" se dilate !

Mais pour tout observateur sa durée propre est toujours la plus faible.

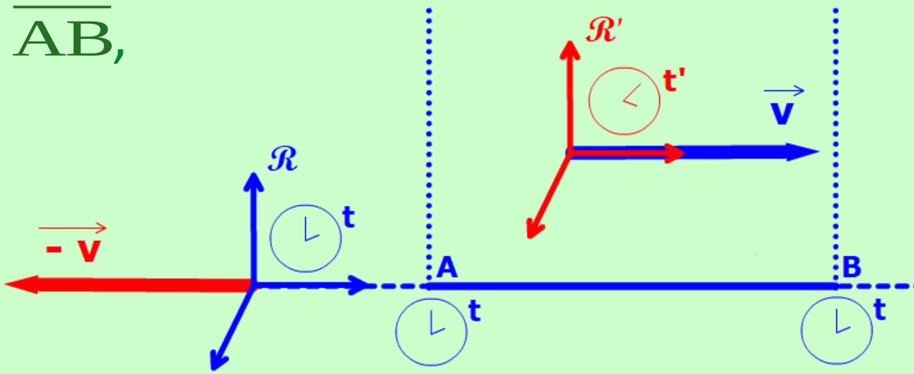
La dilatation des durées est relative, c'est un effet de "perspective"…

Mesures des longueurs



Soit L_0 la longueur propre de la règle $\overline{\mathrm{AB}}$, attachée au référentiel $\mathcal{R}$.

L' est la longueur de $\overline{\mathrm{AB}}$ mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}'$.



La durée entre les passages de A et de B devant l'observateur en $\mathcal{R}'$ est :

$$\mathrm{T}' = t'_A - t'_B = \mathrm{L}' / v$$

Dans $\mathcal{R}$ la durée pour parcourir la distance L_0 à la vitesse v est : $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{L}_0}{v}$.

La relation entre les durées dans les deux référentiels est : $\mathrm{T} = \gamma\, \mathrm{T}'$.

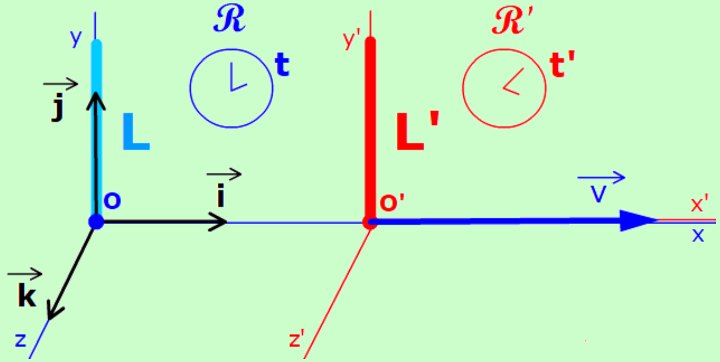
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{L}_0}{v} = \gamma \frac{\mathrm{L}'}{v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}' = \frac{1}{\gamma}\mathrm{L}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{L}' = \mathrm{L}_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \mathrm{L}' \leq \mathrm{L}_0$$

__Pour tout observateur "fixe", la règle du référentiel "mobile" raccourcit!__

Mais pour tout observateur sa longueur propre est toujours la plus grande.

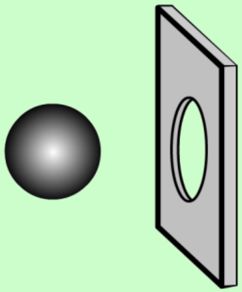
Le raccourcissement des longueurs est encore un effet de "perspective".

Longueurs perpendiculaires à la vitesse

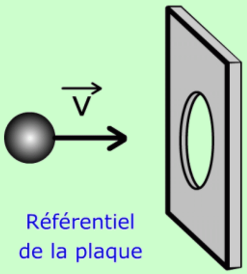


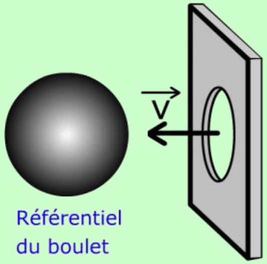
Soit deux règles perpendiculaires à leur vitesse relative v. Leurs longueurs sont-elles alors modifiées ? Le paradoxe du boulet (Séguin, Descheneau, Tardif, 2010), donne la réponse.

Un boulet de rayon R s'approche d'une plaque ayant une ouverture circulaire de rayon R avec une vitesse $v = c / 2$.



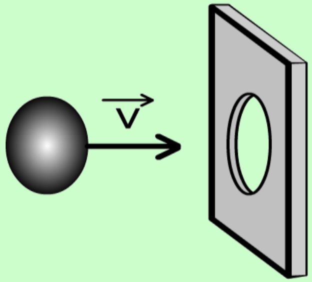
Si les longueurs perpendiculaires varient comme les parallèles :





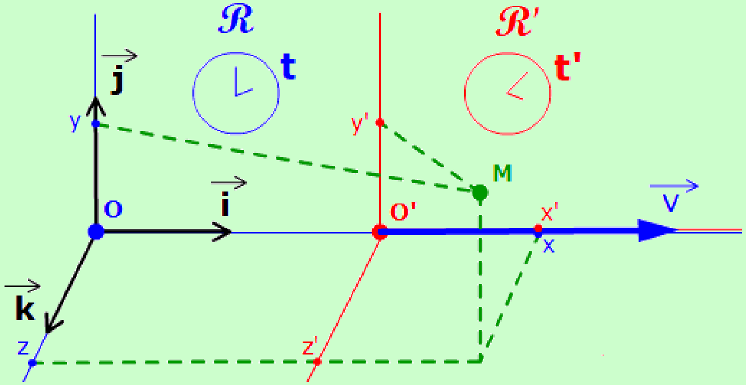
Principe de relativité en défaut !

<u>La véritable forme du boulet</u> dans le référentiel de la plaque :



<u>La longueur de la règle perpendiculaire à la vitesse, ne varie pas</u> : L = L'

Changement de référentiels d'inertie



Le point M / $\mathcal{R}$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Le point M / $\mathcal{R}'$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

Longueurs $\perp \vec{v}$: inchangées $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}}$

Une longueur mobile L' // à la vitesse est mesurée plus courte que celle restée au repos L_0 $\Rightarrow$ $L' = L_0 \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$

Dans le référentiel $\mathcal{R}$: $x = vt + x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$: $\left(\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'O}\right)\cdot\vec{i}$ $\Rightarrow$ $x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'$

$\Rightarrow$ $x = vt + \left(x\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'\right)\sqrt{1 - v^2/c^2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = x\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t - \frac{x\,v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Avec les relations encadrées, on retrouve les transformations de Lorentz !

Les postulats d'Einstein

Einstein dans son article (30 juin 1905), après avoir analysé les concepts de temps et de simultanéité, postule :

1°) Le Principe de relativité , énoncé en conjecture par Poincaré (1904) :

"Dans tout référentiel d'inertie, les lois de la Physique sont identiques ".

2°) Le Principe de la constance de la vitesse de la lumière c :

"Dans tout référentiel d'inertie la vitesse de la lumière c est constante, quel que soit le mouvement de la source dans le vide ".

Puis il en déduit les expressions des transformations de Lorentz !

Lévy-Leblond a montré (1976) qu'avec : le principe de relativité, les symétries de l'espace et du temps, le principe de causalité et l'appartenance à un groupe, les seules transformations linéaires sont :

$$\boxed{t' = \frac{t - (v\,x)/k^2}{\sqrt{1 - v^2/k^2}} \quad ; \quad x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - v^2/k^2}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z}$$

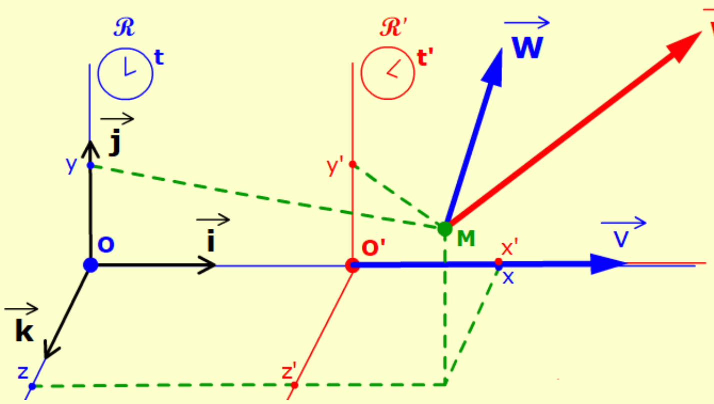
Où k est une vitesse limite supérieure : celle d'une particule de masse nulle. Actuellement le photon ayant une masse mesurée nulle, on identifie k à la vitesse de la lumière : k = c. Ces relations sont les TL !..

Le Principe de relativité seul, inclut la constance de la vitesse de la lumière.

Transformations des vitesses

La vitesse de $\mathscr{R}'$ dans $\mathscr{R}$ est $\vec{v} = v\ \vec{i}$. La vitesse du point M dans $\mathscr{R}$ est $\overrightarrow{W}$.
Et $\overrightarrow{W}'$ celle du point M depuis $\mathscr{R}'$. Avec : $\overrightarrow{W} \overset{\text{def}}{=} d\overrightarrow{OM}/dt$ et $\overrightarrow{W}' \overset{\text{def}}{=} d\overrightarrow{O'M}/dt$,

la différentiation des transformations de Lorentz :



$$\boxed{\begin{aligned} dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right) \\ dx' &= \gamma\,(dx - v\,dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}}$$

conduit aux lois de transformations des vitesses :

$$\boxed{W_x' = \frac{W_x - v}{1 - \dfrac{v\,W_x}{c^2}} \quad ; \quad W_y' = \frac{W_y\,\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v\,W_x}{c^2}} \quad ; \quad W_z' = \frac{W_z\,\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v\,W_x}{c^2}}}$$

Si : $\overrightarrow{W} = \vec{i}\,\left|\overrightarrow{W}\right| \Rightarrow \overrightarrow{W}' = \vec{i}\,\left|\overrightarrow{W}'\right|$
on obtient la loi d'addition
des vitesses relativistes :

$$\boxed{W' = \frac{W - v}{1 - \dfrac{v\,W}{c^2}}} \quad \xrightarrow[v \ll c]{} \quad W' = W - v$$

(*Loi classique*)

Impulsion et énergies relativistes

Les 3 composantes classiques de l'impulsion $\vec{P}_N = m\,\vec{v}$, d'un corpuscule de masse m, sont les intégrales premières associées à l'homogénéité de l'espace $\mathbb{R}^3$. L'impulsion relativiste $\vec{P}$, aux vitesses faibles doit redonner l'expression classique : $\lim\limits_{v/c \to 0} \vec{P} = \vec{P}_N$. On pose alors : $\vec{P} = f(v)\,\vec{P}_N$.

La conservation de l'impulsion lors d'une collision élastique de deux corpuscules identiques, avec les TL conduit à l'expression de l'impulsion :

$$\vec{P} = m\,\vec{v} \,/\, \sqrt{1-\beta^2} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{P} = \gamma\, m\, \vec{v}} \xrightarrow{v/c \to 0} m\,\vec{v}$$

L'énergie cinétique K, élémentaire fournie par une force constante à une masse m au repos est : $dK = \vec{F} \bullet \vec{d\ell} = \vec{F} \bullet \vec{v}\, dt = F\, v\, dt$ (trajectoire rectiligne).

La force étant par définition ce qui modifie l'impulsion $\vec{F} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d\vec{P}}{dt}$, il vient :

$$dK = F\,v\,dt = \frac{dP}{dt}\,v\,dt = v\,dP \;\Rightarrow\; K(t) = \int_0^t v\,dP$$

$$K = \int_0^t d(Pv) - \int_0^t P\,dv = [\,P\,v\,]_0^t - \int_0^v P\,du = \frac{m\,v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \int_0^v \frac{m\,u}{\sqrt{1-\beta^2}}\,du \bullet\bullet\bullet$$

$\bullet\bullet\bullet\ \boxed{K = m\,c^2\,(\gamma - 1)}$ L'énergie cinétique K est la différence entre une énergie totale : $\boxed{E = \gamma\, m\, c^2}$ et une énergie au repos : $\boxed{E_0 = m\, c^2}$

Liens entre l'énergie et l'impulsion

La masse équivalente à un rayonnement avait été déjà proposée par Newton (1704). Plusieurs auteurs ont envisagé l'expression : $m_{ray} = E_{ray} / c^2$ dont Poincaré (1900), de Pretto (1904) et enfin Einstein (1905).

Mais seul Einstein extrapola à une particule massique quelconque :

"La masse d'un corps est une mesure de son contenu en énergie" : $E_0 = m\, c^2$.

En développant l'énergie totale $E = \gamma\, m\, c^2$, en puissance de v/c :

$$E = \gamma\, m\, c^2 = m\, c^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2} + \frac{5}{16} \frac{m v^6}{c^4} \bullet\bullet\bullet \xrightarrow{v/c \to 0} m\, c^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

L'énergie E est la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique

Les nouveaux concepts d'espace et de temps engendrent logiquement l'intrication Energie-Impulsion. On déduit sans difficulté les relations :

$$\boxed{\vec{P} = E\, \vec{v} / c^2} \quad \text{et :} \quad \boxed{E^2 - P^2 c^2 = m^2\, c^4}$$

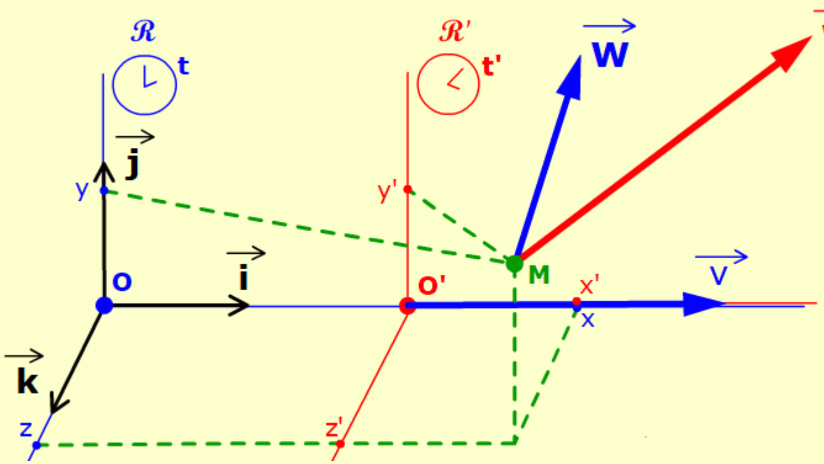
$\Rightarrow E^2 - P^2 c^2$: est un invariant par transformations de Lorentz.

Et si particule de masse nulle : $m = 0 \Rightarrow E^2 - P^2 c^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P = E / c}$

$$\Rightarrow P = \left|\vec{P}\right| = \frac{E}{c} \frac{\left|\vec{v}\right|}{c} = \frac{E}{c} \frac{v}{c} = \frac{E}{c} \Rightarrow \boxed{v = c}$$

TL sur les grandeurs dynamiques

Les transformées de Lorentz "spéciales" et leurs différentiations ont permis d'obtenir les lois de transformations des vitesses :



$$\begin{cases} ct' = \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' = \gamma\,(x - \beta\, ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dct' = \gamma\,(dct - \beta dx) \\ dx' = \gamma\,(dx - v dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{W_x' = \frac{W_x - v}{1 - \beta \frac{W_x}{c}} \;;\; W_y' = \frac{W_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta \frac{W_x}{c}} \;;\; W_z' = \frac{W_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta \frac{W_x}{c}}}$$

Leur action sur l'impulsion $\vec{P} = \gamma\, m\, \vec{v}$ et sur l'énergie $E = \gamma\, m\, c^2$ donne :

$$\boxed{\begin{cases} P'_x = \gamma\,(P_x - \beta E / c) \\ P'_y = P_y \\ P'_z = P_z \end{cases}}$$

ainsi que

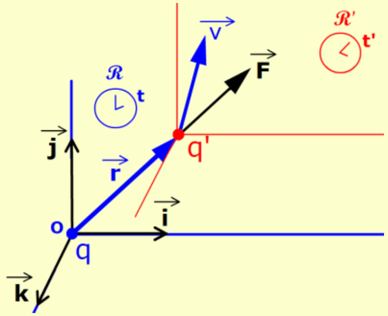
$$\boxed{E' = \gamma\,(E - v\, P_x)}$$

La force $\vec{F} \overset{\text{def}}{=} d\vec{P}/dt$, étant la variation temporelle de l'impulsion , il vient :

$$\boxed{F'_x = F_x - \frac{\beta\, V_y}{1 - \beta\, V_x} F_y - \frac{\beta\, V_z}{1 - \beta\, V_x} F_z \;;\; F'_y = \frac{c\sqrt{1-\beta^2}}{c - \beta\, V_x} F_y \;;\; F'_z = \frac{c\sqrt{1-\beta^2}}{c - \beta\, V_x} F_z}$$

TL sur les forces de Coulomb

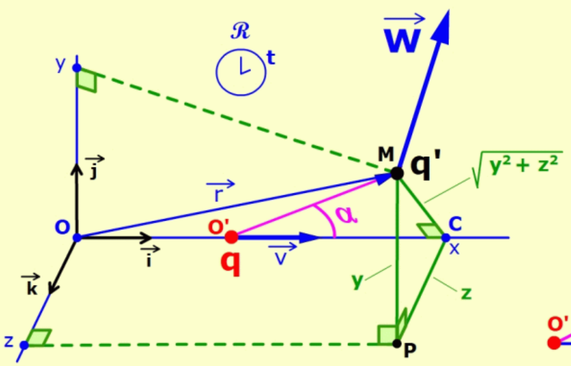
Les transformées de Lorentz laissent covariante la force de Coulomb sur la charge q' en mouvement par rapport à q :

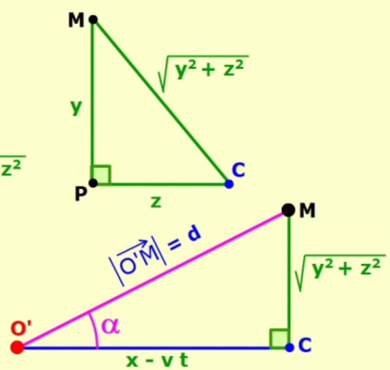


TL sur : $\boxed{\vec{F}' = q'\,\vec{E}'}$ $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q'\,\vec{E}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = q'\,\vec{E}}$$

Si 2 charges q et q' ont des mouvements rectilignes uniformes dans $\mathscr{R}$.





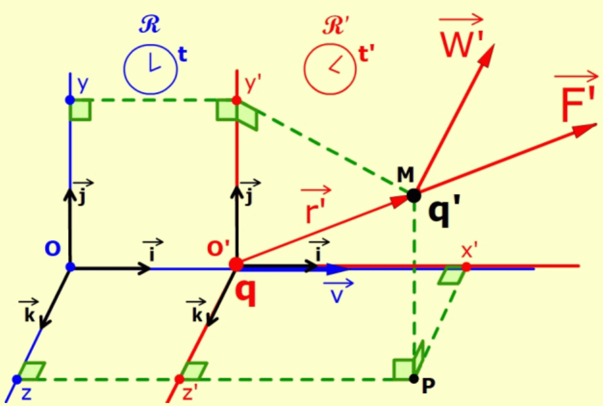
Avec : $\overrightarrow{OO'} = v\,t\,\vec{i}$; $\left|\overrightarrow{O'C}\right| = x - v\,t$

$$\left|\overrightarrow{O'M}\right|^2 = d^2 = (x - v\,t)^2 + y^2 + z^2$$

Posons : $\boxed{\Phi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{q\,q'}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,d^3}\,\dfrac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}}$

TL sur la force de Coulomb : $\vec{F}' = \dfrac{q\,q'}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \dfrac{q\,q'}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

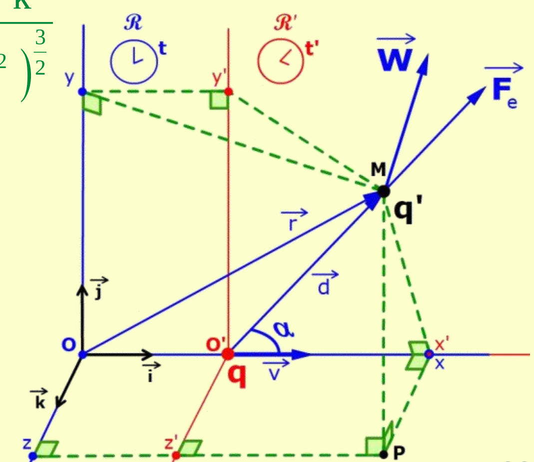
$$\Rightarrow \vec{F}' = \Phi\,\frac{\vec{r}\,'}{\gamma}$$



Dans $\mathscr{R}$: $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$

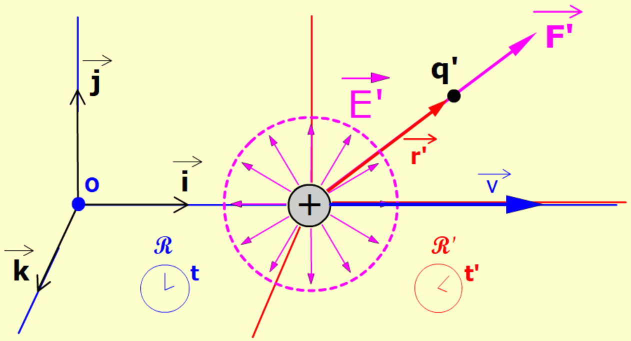
avec $\boxed{\vec{F}_e = \Phi\,\vec{d}\,,\ \ \forall\,\vec{W}}$

et $\boxed{\vec{F}_m = \dfrac{\Phi}{c^2}\left(\left(\vec{W}\bullet\vec{d}\right)\vec{v} - \left(\vec{W}\bullet\vec{v}\right)\vec{d}\right)}$



TL et les champs électromagnétiques

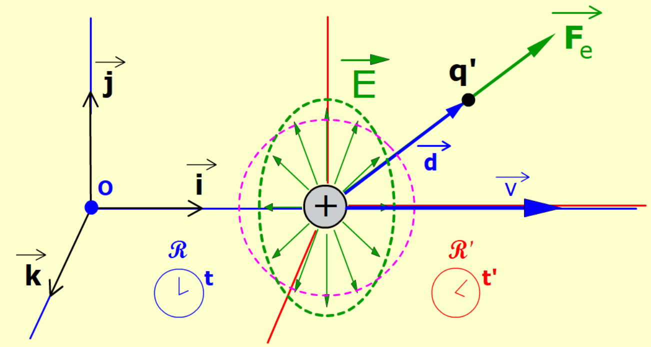
Après les TL le champ coulombien reste radial, mais son intensité est modulée :



$$\boxed{\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{\vec{r}'}{r'}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\frac{\vec{d}}{d}}$$

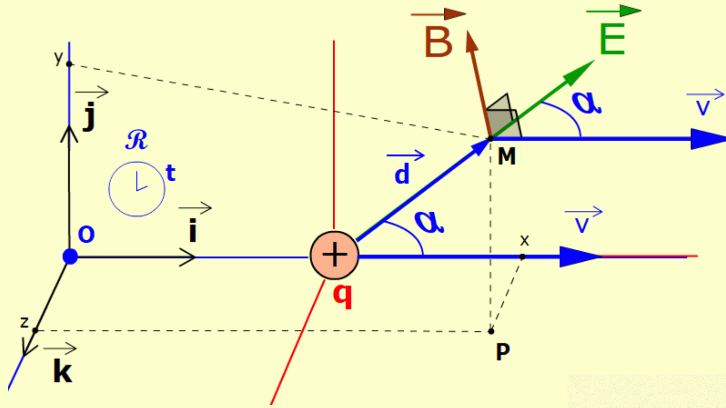


Pour la force qui dépend de $\vec{W}$:

$$\vec{F}_m = \frac{\Phi}{c^2}\left(\left(\vec{W}\bullet\vec{d}\right)\vec{v}-\left(\vec{W}\bullet\vec{v}\right)\vec{d}\right) = \frac{\Phi}{c^2}\vec{W}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{d}\right)$$

Comme $\Phi = \dfrac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\dfrac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}$

Si $\boxed{\vec{B} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\wedge\vec{d}}{d^3}\dfrac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}}$



$\vec{B}$: le champ d'induction magnétique

$$\Rightarrow$$

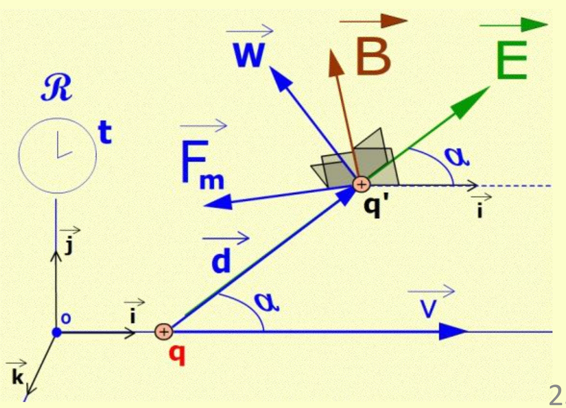
$$\boxed{\vec{F}_m = q'\,\vec{W}\wedge\vec{B}}$$

(force "magnétique")

Avec la force "électrique" : $\vec{F}_e = \dfrac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\vec{d}$

Il vient : $\boxed{\vec{F}_e = q'\,\vec{E}}$ $\Rightarrow$

$\vec{F}_e + \vec{F}_m =$ La force de Lorentz : $\boxed{\vec{F} = q'\left(\vec{E}+\vec{W}\wedge\vec{B}\right)}$



La réalité et le "constructivisme"

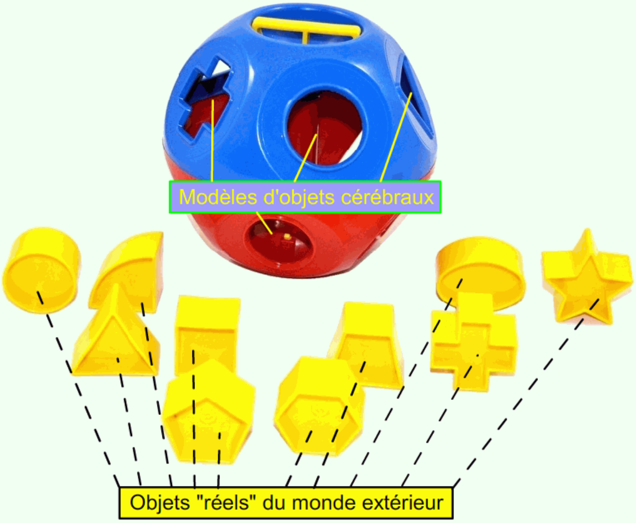
Le "réalisme" considère que les choses que nous percevons, existent telles quelles. Le "constructivisme" découle en majorité de la pensée de Kant. Ce dernier considérait que la connaissance des phénomènes résultait d'une construction effectuée par le sujet. L'idée fût renforcée par les travaux de Piaget sur le développement de l'intelligence, qui révélèrent l'effet déterminant de l'interaction du sujet avec le "monde extérieur".

Plus radical, Von Glaserfeld propose de ne plus considérer la connaissance comme la recherche de la représentation iconique d'une réalité ontologique, qui caractériserait un monde au-delà de notre expérience.
La connaissance devient alors quelque chose que l'organisme construit dans le but de créer de l'intelligibilité dans le flux de l'expérience.

La réalité se révèle par l'expérience, et par conséquent son accord au réel dépend de la qualité de l'expérience. La manière de saisir la réalité présente, grâce à la méthode scientifique, des garanties d'adéquation au réel. Bien qu'elles ne fournissent qu'une connaissance de la réalité partielle et toujours en évolution, les sciences en donnent une vision bien plus large et plus assurée, que l'expérience ordinaire.

Les concepts et la réalité

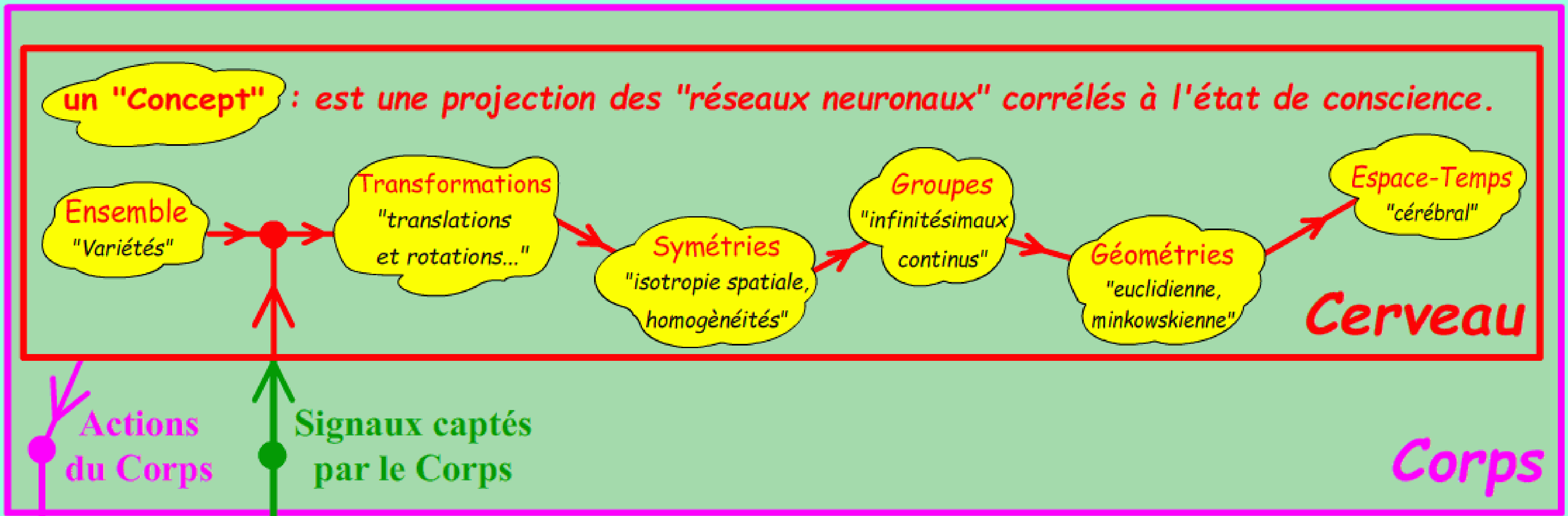
Un concept est une représentation mentale d'un objet ou d'une idée. Pour un sujet conscient, c'est le contenu de sa pensée.

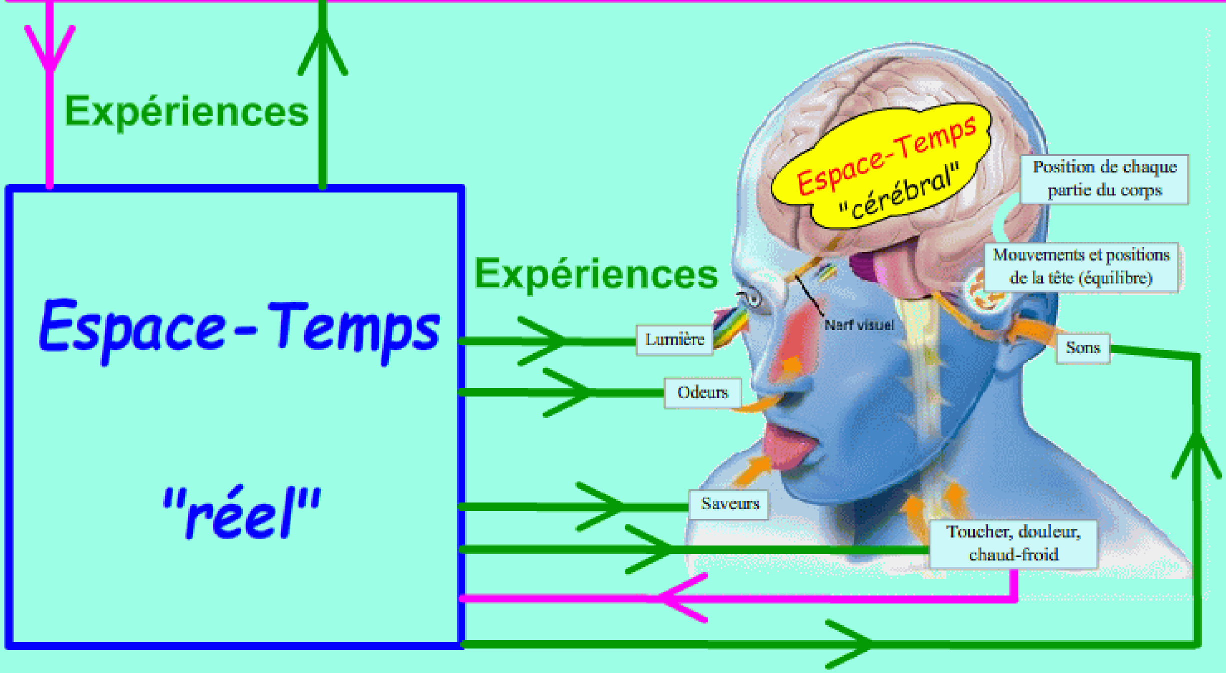


Dehaene : *"…en état de conscience, le cerveau projette des représentations sur le monde extérieur. Mais ce sont des objets cérébraux : des structures de données qui préexistent à l'intérieur du cerveau, qu'on applique aux signaux venant de l'extérieur. Les objets cérébraux pour lesquels ça colle restent, les autres sont éliminés… Une sorte de darwinisme mental… Toutes ces représentations approximatives sont issues de notre cerveau... La théorie physique est dans le cerveau du physicien. L'objet extérieur est partiellement cerné par la modélisation".*

Einstein : *"Le chercheur pourra aussi croire à l'existence d'une limite idéale de la connaissance que l'esprit humain peut atteindre. Il pourra appeler cette limite idéale : la réalité objective".*

Le concept "Espace-temps"



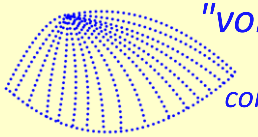


"Les concepts physiques sont des créations libres de l'esprit humain ... et ne sont pas uniquement déterminés par le monde extérieur !..."

A. Einstein

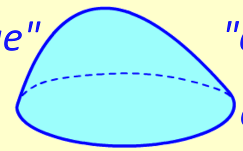
"Espace-temps de Galilée"

Ensemble



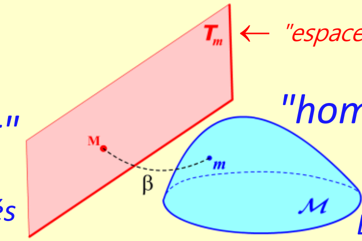
points

$+$ "voisinage" $\Rightarrow$ continuité



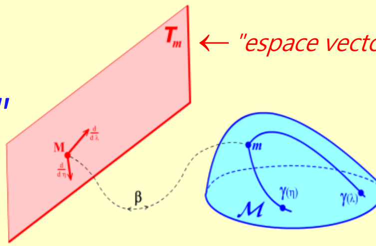
espace topologique

$+$ "atlas complet" $\Rightarrow$ Cartes, coordonnés



variété topologique

$+$ "homéomorphisme" $\Rightarrow$ β et β^{-1} Bijections continues



variété différentiable : $\mathcal{M}^4$

Transformations — Symétries — Groupes

Transformations	Symétries	Groupes
$t' = t + \Delta t$	Uniformité du temps.................	$(\mathbb{R},+) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}$
$\vec{r}\,' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$	Homogénéité de l'espace.........	$(\mathbb{R}^3,+) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^3$
$\vec{r}\,' = R(\vec{\theta})\ \vec{r}$	Isotropie de l'espace................	$SO(3)$
$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\,t$; $t' = t$	Lois mécaniques covariantes...	$(\mathbb{R}^3,+) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^3$

Groupe de Galilée :

$$SGal(3) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \times SO(3) \times \mathbb{R}^3\right)$$

Propriétés géométriques ($T_m = \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M}^4$)

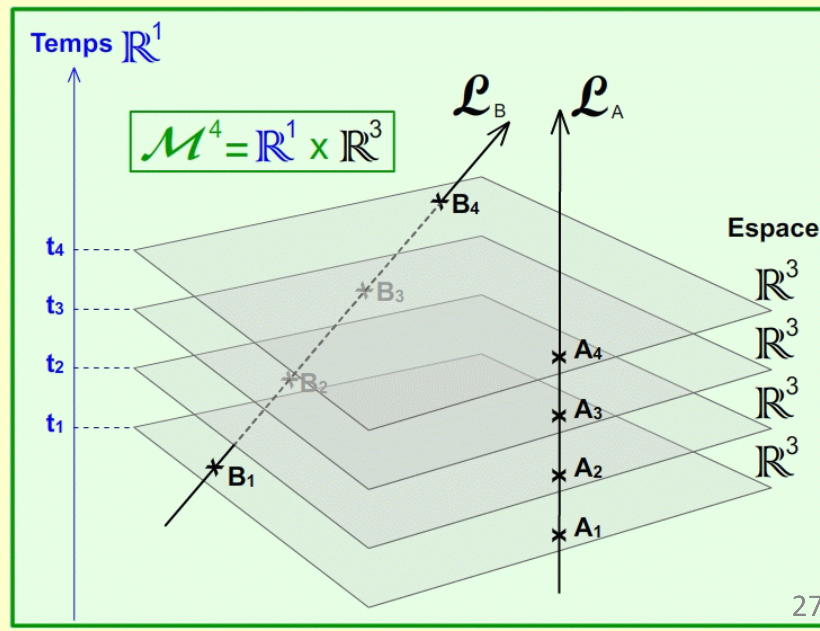
Temps et espace "dissociables" : $\mathcal{M}^4 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$

Anisotropie du temps $\Rightarrow$ durée $dt > 0$

L'espace est euclidien $\Rightarrow$ $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

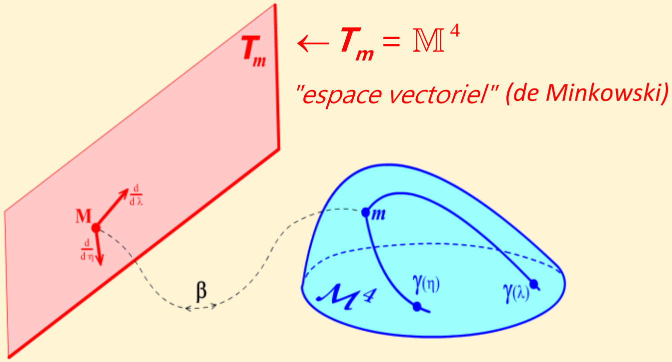
Mouvements rectilignes uniformes : $\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\,t \end{cases}$

$\Rightarrow$ *droites dans l'espace-temps*



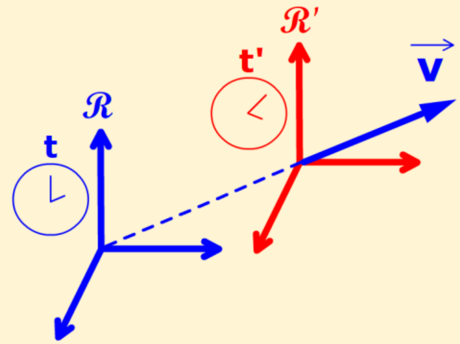
"Les groupes de Lorentz"

Ensemble



variété différentiable $\mathcal{M}^4$

Transformations générales de Lorentz



posons: $\vec{\beta} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\vec{v}}{c}$; $\gamma \overset{\text{def}}{=} 1/\sqrt{1-\beta^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\beta}\left(\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}(\gamma-1) - \gamma\, c\, t\right) \\ t = \gamma\left(t' - \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{\beta}}{c}\right) \end{cases}$$

Le temps et l'espace sont devenus indissociables.

∃ invariant : $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \rightarrow$ "signature" $= (-,+,+,+)$. $\mathbb{M}^4$ associé à $\mathcal{M}^4$ est "plat" mais "pseudo-euclidien". TL : "pseudo-rotations" entre 4 axes Oct, Ox, Oy, Oz.

Groupes

g. "orthogonal" $O(4)$: 6 rotations dans $\mathbb{R}^4$.

g. de "Lorentz" $O(3,1)$: 6 pseudo-rotations dans $\mathbb{M}^4$; $SO(3) \subset O(3,1)$.

g. de "Lorentz orthochrone" $O_o(3,1)$ / $dt > 0$; $O_o(3,1) \subset O(3,1)$.

g. de "Lorentz propre" $SO(3,1)$ / tétraèdre de base reste positif ; $SO(3,1) \subset O(3,1)$.

g. de "Lorentz restreint" $SO_o(3,1) = SO(3,1) \cap O_o(3,1)$.

g. des "Translations" $(\mathbb{R}^4,+)$ dans $\mathbb{R}^4$.

g. de "Poincaré" restreint" $ISO_o(3,1) = (\mathbb{R}^4,+) \cup SO_o(3,1)$

C'est ce dernier groupe : $ISO_o(3,1)$ *qui déterminera les propriétés de l'espace vectoriel* $\mathbb{M}^4$.

"L'espace-temps de Minkowski $\mathbb{M}^4$ "

Propriétés géométriques

Temps et espace sont "indissociables". $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 =$ invariant.

La signature vaut $(-,+,+,+)$. Pour un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{M}^4 \rightarrow \vec{v} = v^\alpha \, \vec{e}_\alpha$ avec $0 \le \alpha \le 3$.

Il existe une base : $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $\rightarrow$ $(\eta_{\alpha\beta})$ matrice de Minkowski telle que :

telle que : $\begin{cases} \vec{e}_0 \bullet \vec{e}_0 = -1 \\ \vec{e}_i \bullet \vec{e}_i = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le 3 \\ \vec{e}_\alpha \bullet \vec{e}_\beta = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \ne \beta \end{cases}$

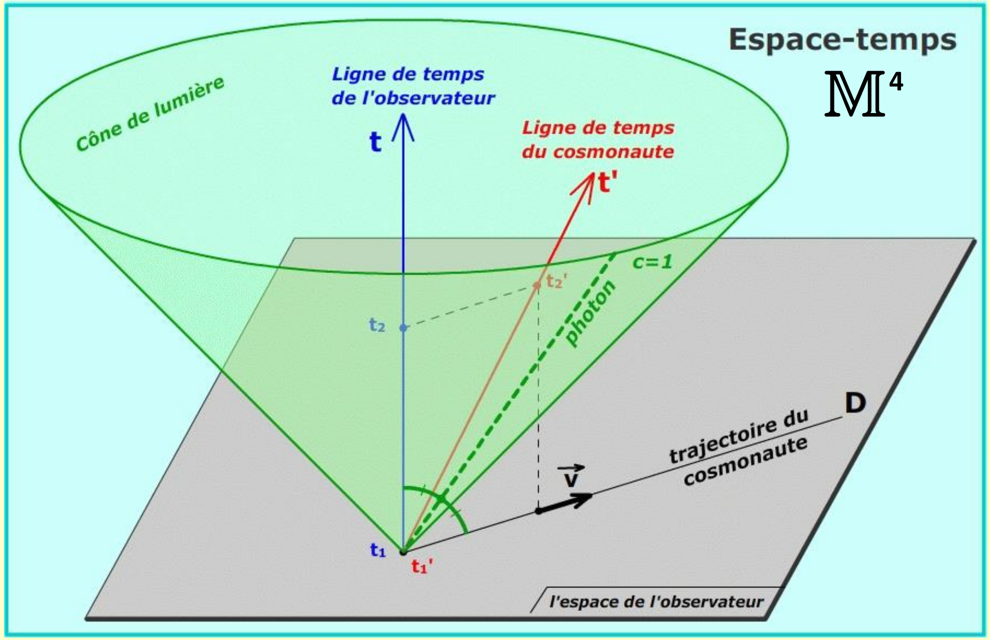
$$\eta_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \vec{e}_\alpha \bullet \vec{e}_\beta \Rightarrow (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = v^\alpha \, \vec{e}_\alpha$, $\vec{w} = w^\beta \, \vec{e}_\beta \in \mathbb{M}^4$, produit scalaire : $\vec{v} \bullet \vec{w} = -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 = v^\alpha w^\beta \eta_{\alpha\beta}$

Pour une base quelconque : $g_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \vec{e}_\alpha \bullet \vec{e}_\beta$

$g_{\alpha\beta}$: composante du tenseur "métrique" $\mathbf{g}$

$\Rightarrow \quad \vec{v} \bullet \vec{w} = v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta}$ avec $0 \le \alpha , \beta \le 3$



Pour un vecteur déplacement $\vec{v}$:

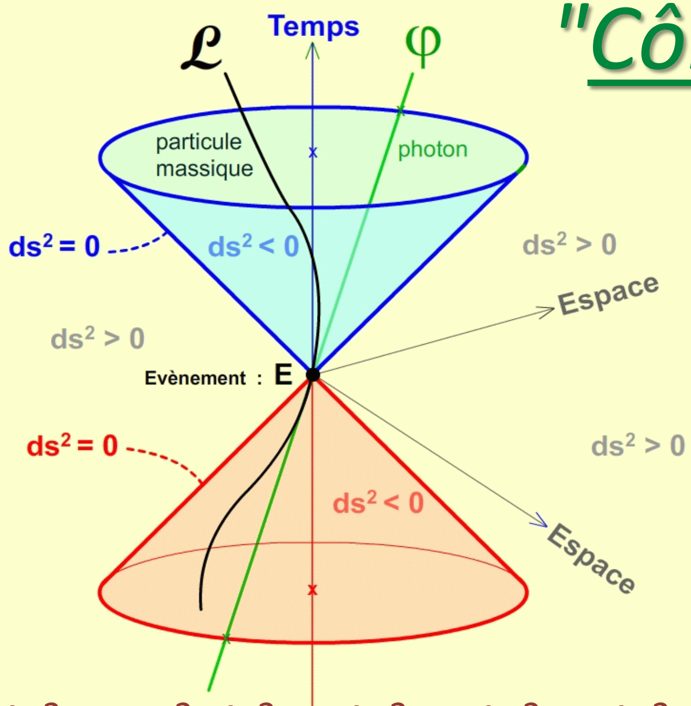
$\vec{v} \bullet \vec{v} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}$ est du genre temps

$\vec{v} \bullet \vec{v} > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}$ est du genre espace

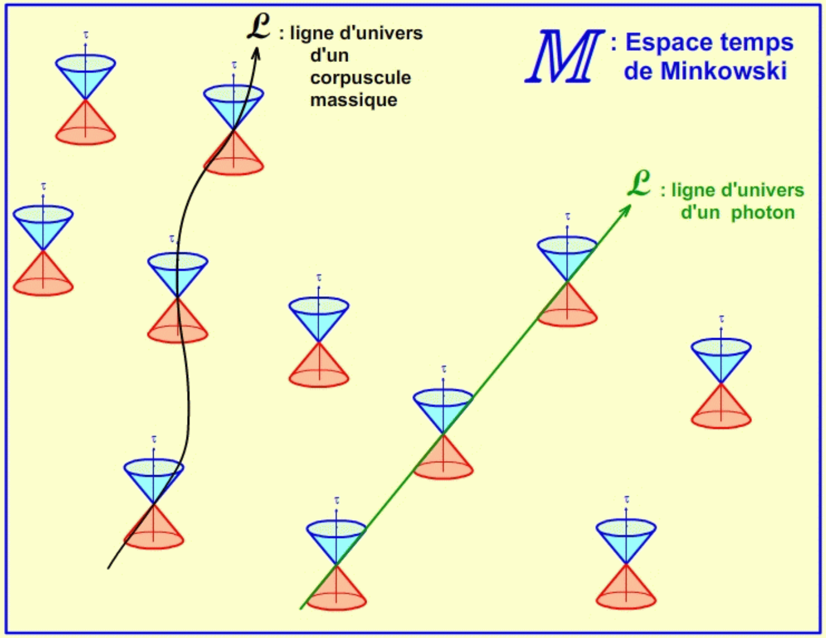
$\vec{v} \bullet \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}$ est du genre lumière

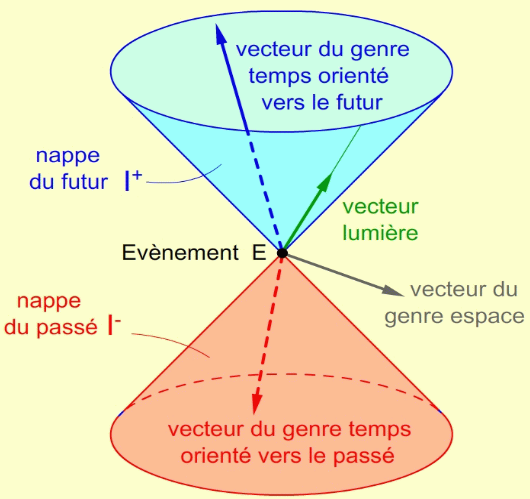
Sa norme est : $|\vec{v}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{|\vec{v} \bullet \vec{v}|}$

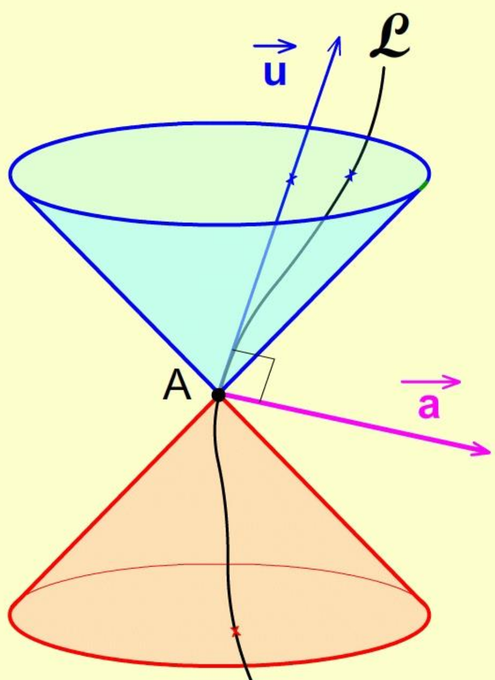
"Cônes de lumière"



$$ds^2 = -\,c^2\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$







ℒ : ligne d'Univers d'une particule massique

$d\vec{x} = \overrightarrow{AA'} \rightarrow \vec{u} = \dfrac{d\vec{x}}{d\lambda}$: vecteur tangent

$\lambda = c\,\tau$, τ : temps propre

Quadri-vitesse : $\vec{u} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d\vec{x}}{c\,d\tau}$ du genre temps

unitaire, sans dimension physique.

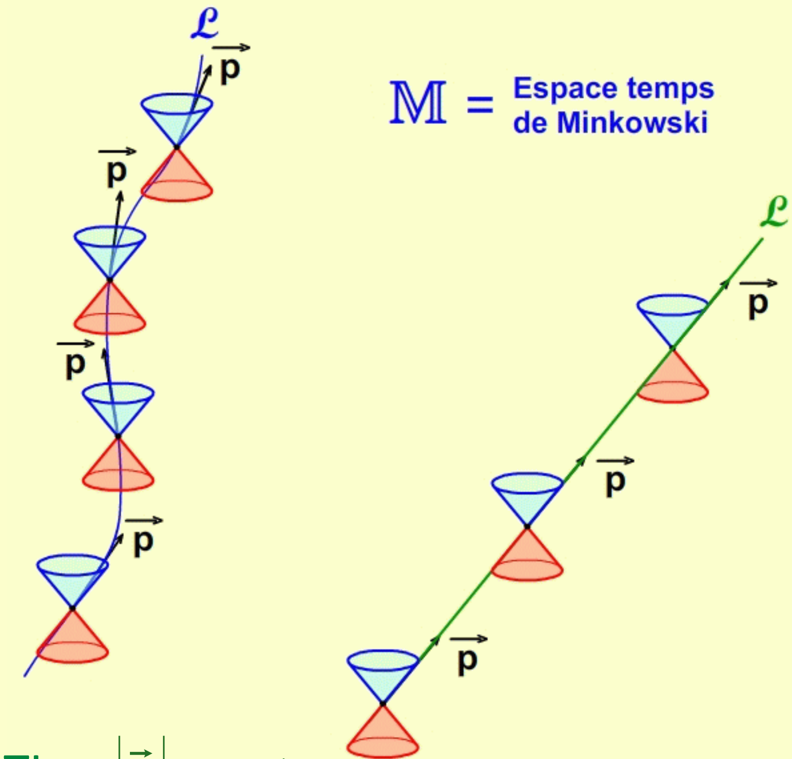
$\Rightarrow \left|\vec{u}\right| = 1$ et $\vec{u} \bullet \vec{u} = -1$

$\vec{a} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d\vec{u}}{c\,d\tau}$: quadri-accélération $\sim 1 / L$

$\vec{a} \bullet \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{u} \rightarrow \vec{a}$: genre espace.

"Quadri-impulsion"

Pour une particule $\mathscr{P}$ sans structure interne (point), sa dynamique est entièrement déterminée par un quadri-vecteur $\vec{p}$ tangent à $\mathscr{L}$ et orienté vers le futur, quadri-impulsion :



$$\boxed{\vec{p} \overset{\text{def}}{=} p^\alpha \vec{e}_\alpha = p^0 \vec{e}_0 + p^1 \vec{e}_1 + p^2 \vec{e}_2 + p^3 \vec{e}_3}$$

$$\vec{p} \bullet \vec{p} = p^\alpha p^\beta \eta_{\alpha\beta} = -p^0 p^0 + p^1 p^1 + p^2 p^2 + p^3 p^3$$

$$\Rightarrow \left|\vec{p}\right| = \sqrt{-\vec{p} \bullet \vec{p}} \quad , (\vec{p} \textit{ du genre temps})$$

$$\Rightarrow \vec{p} \bullet \vec{p} = -\left|\vec{p}\right|^2$$

La norme d'un quadrivecteur est invariante par TL : $\left|\vec{p}\right| = cst.$

On définit la masse m d'une particule $\mathscr{P}$ par : $\boxed{m \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\left|\vec{p}\right|}{c}} \rightarrow \vec{p} \bullet \vec{p} = -m^2 c^2$

Comme $\vec{u}$ est unitaire et tangent à $\mathscr{L}$: $\vec{p} = \left|\vec{p}\right| \vec{u} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = m c \, \vec{u}}$

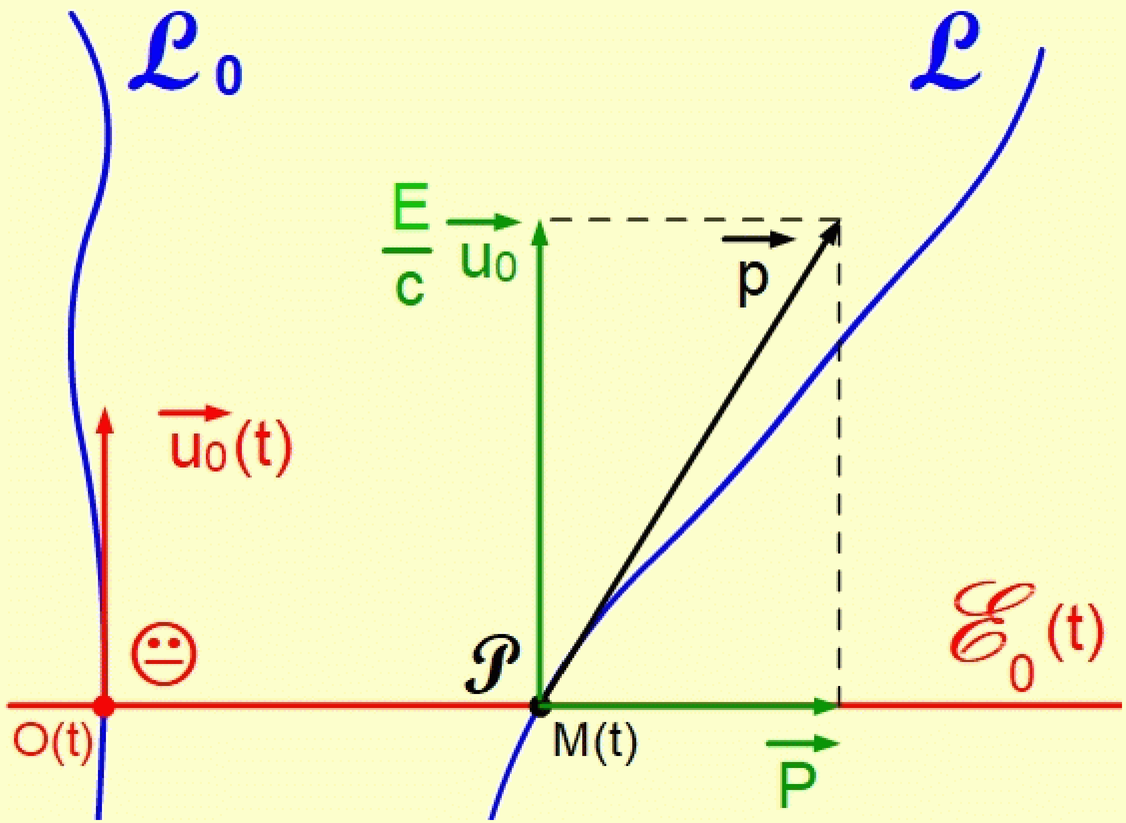
La quadri-impulsion $\vec{p}$ caractérise l'homogénéité de l'espace-temps $\mathbb{M}$. La quadri-impulsion se conserve pour un mouvement rectiligne uniforme ou pour un photon.

"Quadri-impulsion observée"

L'observateur ☺ en O voit à l'instant t, la particule $\mathscr{P}$ dans son espace $\mathscr{E}_0(t)$:

L'impulsion $\overrightarrow{P}$ (tridim) de $\mathscr{P}$ est la projection de la quadri-impulsion $\vec{p}$ sur l'espace $\mathscr{E}_0(t)$:

L'énergie E est associée à l'uniformité du temps de l'observateur ☺ . Donc la projection de $\vec{p}$ sur $c\,\vec{u}_0$:



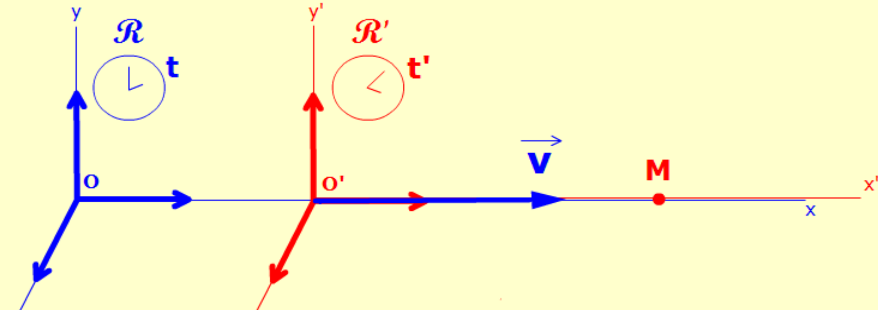
La quadri-impulsion s'écrit : $\boxed{\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u}_0 + \vec{P}}$ $\Rightarrow \vec{p}\bullet\vec{p} = -m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} + 2\,\overrightarrow{P}\bullet\frac{E}{c}\vec{u}_O + \overrightarrow{P}\bullet\overrightarrow{P}$

Comme $\overrightarrow{P}\perp\vec{u}_O$, on déduit la relation d'Einstein : $\boxed{E^2 - P^2c^2 = m^2c^4}$

Pour une masse nulle, on retrouve l'impulsion du "photon", de Maxwell : $\boxed{\left|\vec{P}\right| = \frac{E}{c}}$

"Diagrammes d'espace-temps"

Pour les transformations "spéciales" de Lorentz :



L'évènement E *est la position de* M

$$\begin{cases} ct' = \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' = \gamma\,(x - vt) \\ y' = y \quad ; \quad z' = z \end{cases}$$

où : $\beta = \dfrac{v}{c}$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

Pour les figures de l'espace-temps, 2 des dimensions spatiales sont inutiles.

On nomme diagrammes d'espace-temps : celles avec 1 de temps et 1 d'espace.

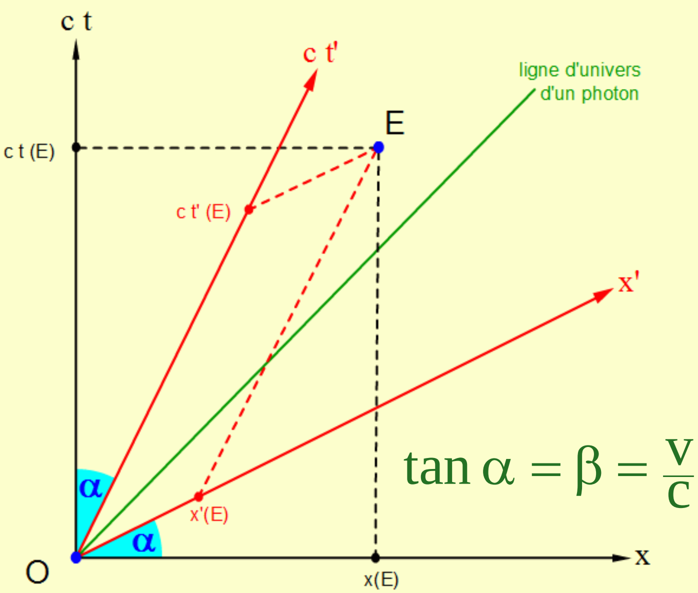


Diagramme de Minkowski

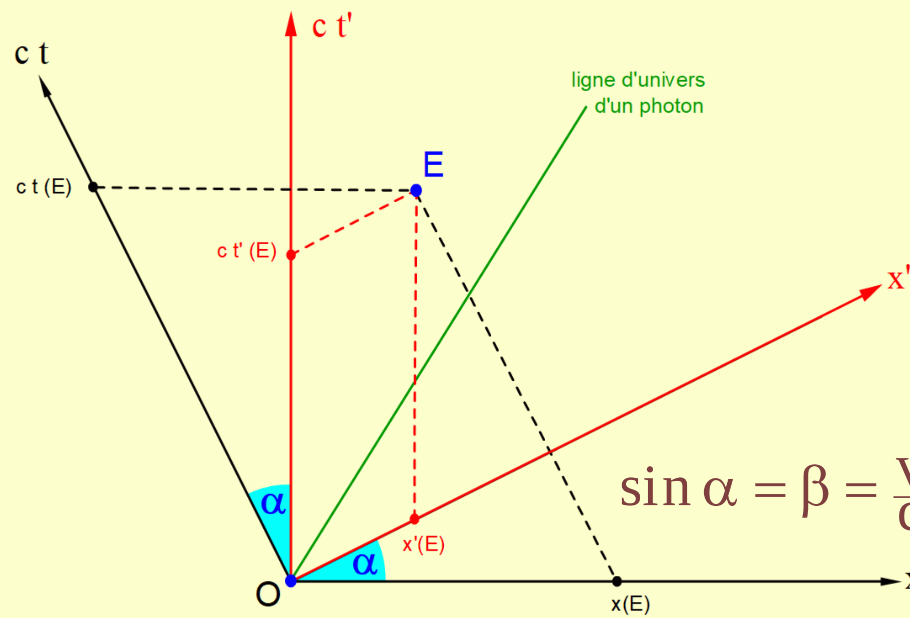
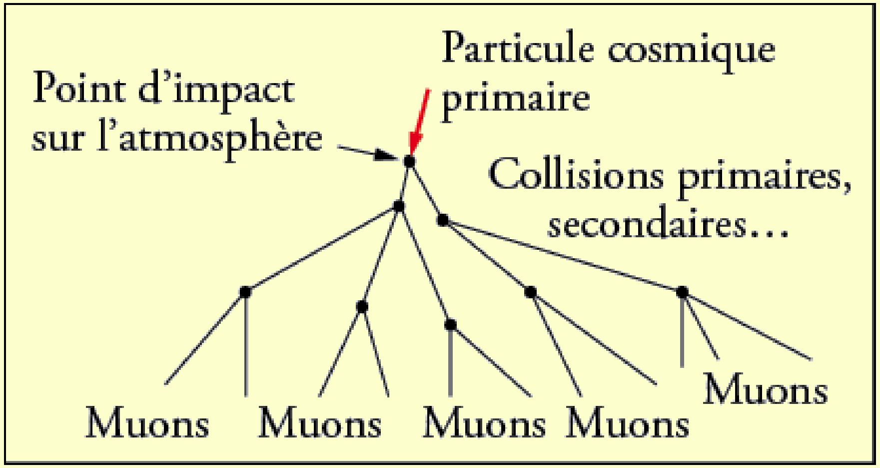
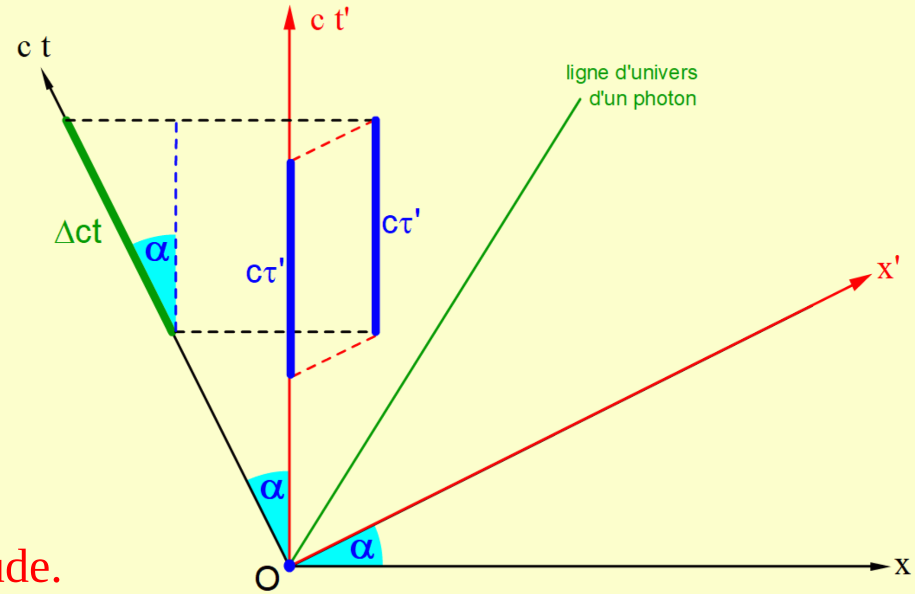


Diagramme de Loedel

"Durée de vie du muon"





Oxct est le référentiel de l'observateur au sol.

Ox'ct' est le référentiel du muon créé en altitude.

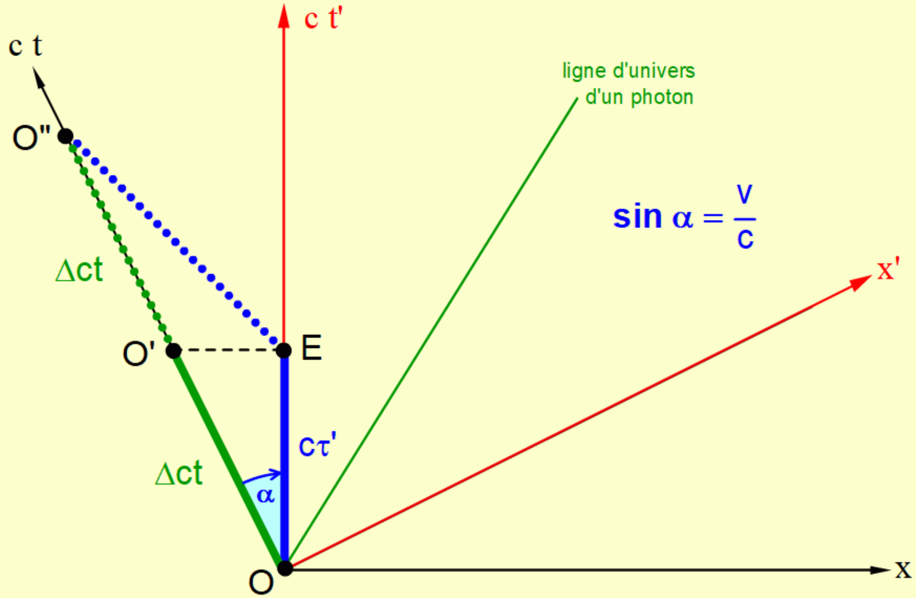
$s_{12} = c\tau'$ est l'intervalle d'univers du muon dans le diagramme de Loedel.

$$\sin\alpha = \frac{v}{c} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{c\tau'}{\Delta ct} = \frac{\tau'}{\Delta t} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{\tau'}{\Delta t}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\Delta t = \tau'\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

La durée de vie d'un muon pour des vitesses faibles est de $2{,}2\,10^{-6}\,\mathrm{s}$. Pour une vitesse de l'ordre de c, il aurait dû disparaitre au bout de $10^{-4}\,\mathrm{s}$ et parcourir juste 600 m.

L'effet de la mesure relativiste lui permet, pour v = 99,98% c, de faire 30 km.
L'énergie cinétique communiquée par les protons cosmiques va jusqu'à $10^{20}\,\mathrm{eV}$!
Les énergies espérées pour le LHC en 2018 sont de $10^{13}\,\mathrm{eV}$…

"Jumeaux de Langevin"



Dans le diagramme de Loedel :

$$\mathbf{v} = \mathrm{c}\ \sin\alpha$$

Le jumeau va de la Terre O à la vitesse uniforme v vers l'étoile E.

La durée de son voyage-aller est τ'.

Sur terre cette durée est de $\Delta t > \tau'$.

Les droites pointillées correspondent au futur retour.

Pour le retour la vitesse change de sens :

$$v \to -v \Rightarrow \alpha \to -\alpha$$

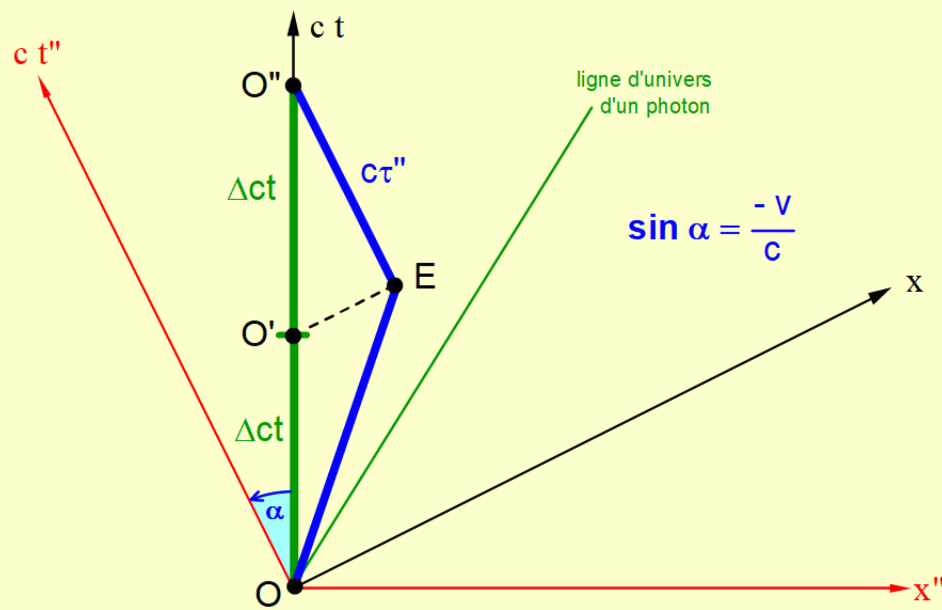
(signe de α est défini par rapport à l'axe temporel du jumeau resté sur Terre).

La durée du voyage-retour du voyageur est τ''. Sur terre elle vaut $\Delta t > \tau''$.

Distance Proxima du Centaure = 4,25 al, et vitesse V = 0,85 C : $2\,\Delta t = 10\,\text{ans}$ d'où :

$$\tau' + \tau'' = 2\,\Delta t / \gamma = 10\,\text{ans} / \sqrt{1/\left(1-(0{,}85)^2\right)}$$

$$\tau' + \tau'' \approx 5\,\text{ans et } 3\,\text{mois}$$



Bibliographie (1/2)

Bartoli A., "Il calorico raggiante e il secondo principio…", Nuovo Cimento, XV, p. 196–202, (1876/1884).

Brehme R., "Geom. Repres. Galilean & Lorentz Transformations.", Am. J. Phys., 30, p.489, (1962).

Carroll S. M. / Fric J., "Cours de relativité Générale", www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG1F.htm, (2015).

Cartan E.,"L'Enseignement Mathématique", Vol. 26(1), p.200, (1927).

Changeux J.-P., "… neuroscience de la personne humaine", www.youtube.com/watch?v=RnVa0tKHK8E, (12 septembre 2011).

Dehaene S., "La conscience est-elle devenue une affaire de science", www.youtube.com/watch?v=y2lMd54tYVY, (2016).

Dehaene S., "L'accès à la conscience", www.college-de-france.fr/site/stanislas-dehaene/course-2010-01-05-09h30.htm, (2010).

Dehaene S., "Le code de la consciences", Odile Jacob, Paris, (2014).

Dehaene S., "L'espace en perspective", www.youtube.com/watch?v=hVDdxb4JCB4, (2015).

Einstein A., "An elementary derivation of the equivalence of mass and energy", Technion J., 5, p.16-18, (1946).

Einstein A., "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", Annalen der Physik, XLIX, p.769-882, §5, (1916).

Einstein A., "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt …", Annalen der Physik, XVIII, p.639-641, (1905).

Einstein A., "La relativité", Petite Bibliothèque Payot, p.34-36, (1979).

Einstein A., "Œuvres choisies 2, Relativité I", Seuil/CNRS, (1993).

Einstein A., "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Annalen der Physik, XVII, p.891-921, (1905).

Einstein A., tr. Solovine M., "L'évolution des idées en physique", Flammarion, (1983).

Faget J., "Electromagnétisme, relativité restreinte", Vuibert, (1975).

Gourgoulhon E., "Relativité générale", luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf, (2017).

Gourgoulhon E., "Relativité restreinte en CPGE", relativite.obspm.fr/relat_cpge.pdf, (2012).

Gourgoulhon E., "Relativité restreinte", EDP Sciences - CNRS Ed., (2010).

Bibliographie, (2/2)

Gruber C., *"Mécanique générale"*, Presse polytechnique romande, p.534-536, (1988).

Kant I., (1781), tr.: Barni J., *"Critique de la raison pure"*, Germer-Baillère, Paris, (1869), BnF-Gallica. (2017).

Klein E., *"...d'où vient l'efficacité des mathématiques",* www.youtube.com/watch?v=YQMhrVSR6X0, (8 juin 2015).

Lachieze-Rey M., *"Au-delà de l'espace et du temps, la nouvelle physique",* p. 63, Le Pommier, Paris, (2003).

Lachièze-Rey M., *"Le temps",* www.youtube.com/watch?v=PUEaKYeRPFg, (8 février 2017).

Landau L., Lifchitz E., *"Physique théorique"*, 10 tomes, Mir, (1966-1990).

Lévy-Leblond J.-M., "*One more derivation of the Lorentz group*", Am. J. Phys., **44,** (1976).

Loedel E. & Amar H., *"Geom. Repr. Lorentz Trans.",* Am. J. Phys., 25 (5), p.326–327, (1957).

Maxwell J. C., *"A Treatise on Electricity and Magnetism"*, Oxford, Clarendon Press, 3ème éd. §792, (1873).

Minkowski H. /traduction Langevin P., hal.archives-ouvertes.fr/hal-00321285/document, (1908).

Minkowski H., tr.: Hennequin A. Marty J., "*Espace et temps*", An. Sc. ENS, 3^{e} série, **26**, p.499-517, (1909).

Nichols E.F., G.F.Hull G.F., *"A preli. Com. on the pressure of heat and light radiation"*, Phys. Rev. 13, 307 (1901).

Nichols E.F., Hull G.F., *"The Pressure Due to Radiation"*, Phys. Rev. 17, 26 (1903).

Pellat H., *"Démonstration de la loi de Maxwell-Bartoli"*, J. Phys. Theor. Appl., 2 (1), pp.484-490, (1903).

Penrose R., "*A la découverte des lois de l'Univers*", Odile Jacob, Paris, (2007).

Poincaré H., (1902), "*La science et l'hypothèse*", Flammarion, Paris, (1917).

Riemann B. (1854), "*Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*", Gauthier-Villars, Paris, (1898).

Séguin M., Descheneau J., Tardif B., "Physique XXI : Tome C, Ondes et physique moderne", de Boeck, (2010).

Tonnelat M.-A., *"Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité"*, (1959).

Cette présentation et 3 documents qui détaillent les démonstrations, sont visibles et téléchargeables dans la rubrique "Physique théorique" du site : http://cours.hoffmann.free.fr