

Résumé sur les fonctions de variable complexe

Patrick Hoffmann

Modifié le 21/05/2017

Résumé sur les fonctions de variable complexe	1
---	---

1. Introduction aux nombres complexes	2
2. Formules d'Euler	3
3. Addition des nombres complexes	3
4. Produits des nombres complexes	4
5. Puissances entières d'un nombre complexe - Formule de Moivre	5
6. Nombres complexes conjugués	6
7. Quotient de deux nombres complexes	6
8. Racines d'un nombre complexe	7
9. Fonction d'une variable complexe	9
10. Théorème de Cauchy et corollaires	10
11. Intégrales de Cauchy	11
12. Séries de Laurent	12
13. Théorème des résidus	13
14. Lemmes de Jordan et théorème du pôle simple central	14

1. Introduction aux nombres complexes

$$\boxed{i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}} \quad , \quad |i| = 1 \quad (1)$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad ; \quad i y \in \mathbb{I} \quad (2)$$

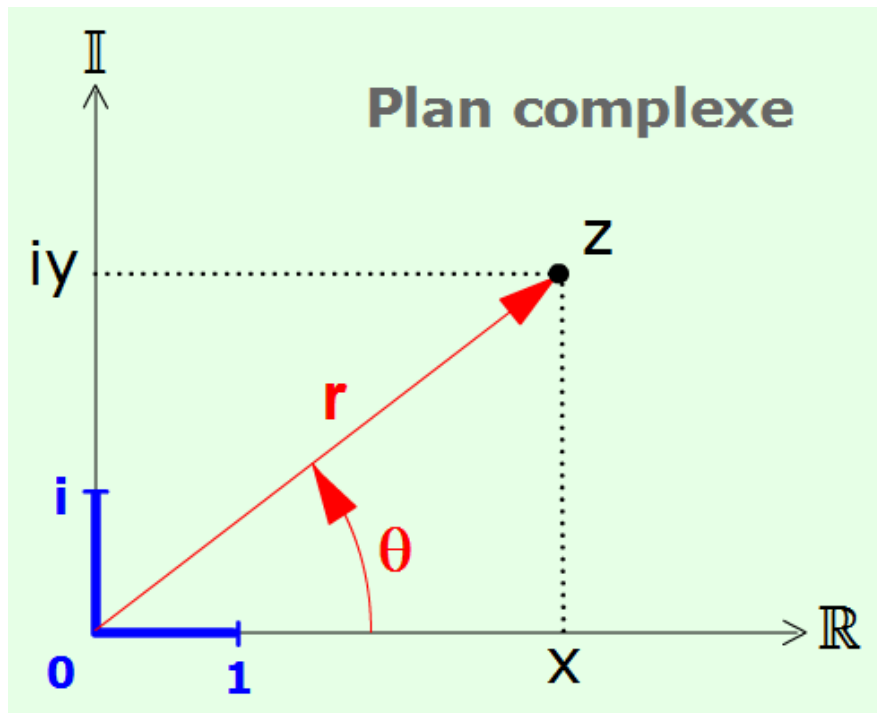


Figure 1

$$\boxed{z \stackrel{\text{def}}{=} x + i y} \quad \boxed{z \in \mathbb{C}} \quad (3)$$

$$\boxed{|i| = 1} \quad (4)$$

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad i y = \operatorname{Im} z \quad (5)$$

$$r = |z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$\arg z \stackrel{\text{def}}{=} \theta + 2 k \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8)$$

$$\boxed{z = r (\cos \theta + i \sin \theta)} \quad (9)$$

2. Formules d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (10)$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (11)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (12)$$

et :

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (13)$$

Avec (9), un nombre complexe z peut s'écrire indifféremment sous les différentes formes :

$$z = x + i y = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad (14)$$

3. Addition des nombres complexes

$$z_1 = a + i b \quad \text{et} \quad z_2 = c + i d \quad (15)$$

$$z = z_1 + z_2 \Rightarrow z = (a + c) + i (b + d) \quad (16)$$

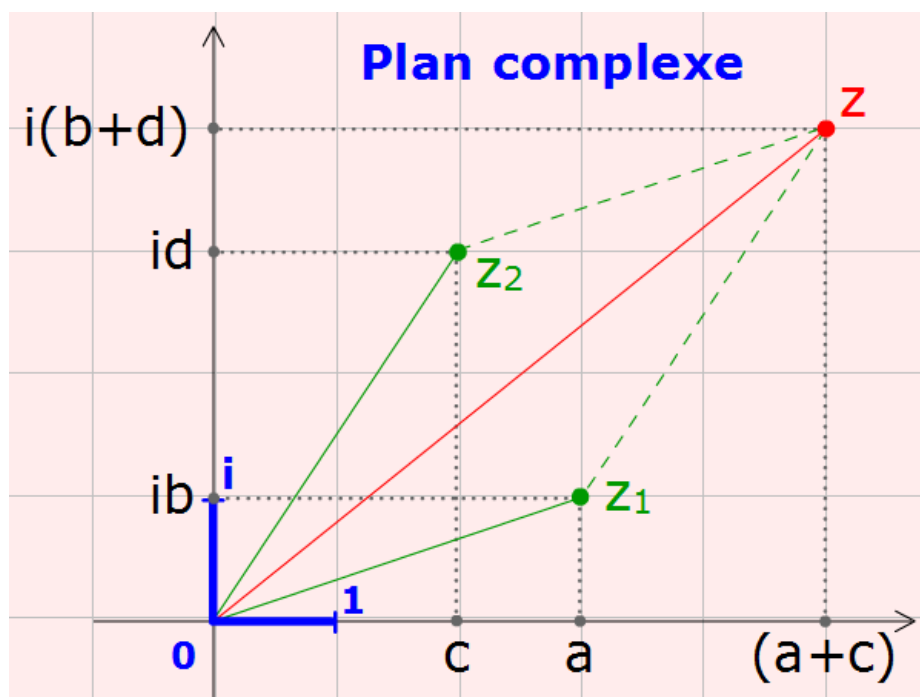


Figure 2

$$u, v \in \mathbb{C} \quad / \quad |u| = |v| = 1 \quad (17)$$

$$u + v = e^{i\theta} + e^{i\omega} \quad (18)$$

$$e^{i\theta} + e^{i\omega} = 2 \cos\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \omega}{2}} \quad (19)$$

$$e^{i\theta} - e^{i\omega} = 2i \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \omega}{2}} \quad (20)$$

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad 1 - e^{i\theta} = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (21)$$

4. Produits des nombres complexes

$$z_1 = a + ib \quad \text{et} \quad z_2 = c + id \quad (22)$$

$$z = z_1 z_2 \Rightarrow \boxed{z = ac - bd + i(bc + ad)} \quad (23)$$

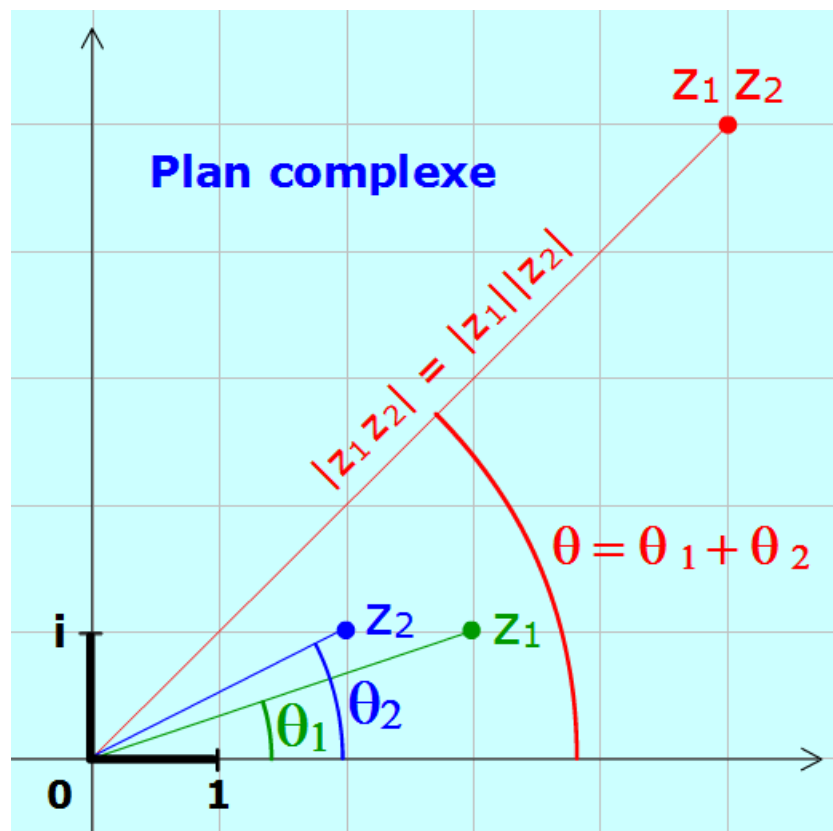


Figure 3

$$z = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right) \quad (24)$$

$$z = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (25)$$

$$|z| = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (26)$$

$$\theta = \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2 \quad (27)$$

5. Puissances entières d'un nombre complexe - Formule de Moivre

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \quad (28)$$

$$z^n = \left[r (\cos \theta + i \sin \theta) \right]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta} \quad (29)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (30)$$

$$\text{avec : } C_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (31)$$

$$\cos n\theta = \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} (-1)^k (\cos \theta)^{n-2k} (\sin \theta)^{2k} \quad (32)$$

$$\sin n\theta = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} C_n^{2k+1} (-1)^k (\cos \theta)^{n-(2k+1)} (\sin \theta)^{2k+1} \quad (33)$$

$$\tan n\theta = \frac{\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} C_n^{2k+1} (-1)^k (\tan \theta)^{2k+1}}{\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} (-1)^k (\tan \theta)^{2k}} \quad (34)$$

6. Nombres complexes conjugués

$$z = x + i y = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad (35)$$

$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - i y = r (\cos \theta - i \sin \theta) = r e^{-i\theta} \quad (36)$$

$$|\bar{z}| = |z| = r \quad \text{et} \quad \arg \bar{z} = -\arg z = -\theta \quad (37)$$

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) = x \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z) = -y \quad (38)$$

$$z + \bar{z} = 2x \quad \text{et} \quad z \bar{z} = |z|^2 = r^2 \quad (39)$$

7. Quotient de deux nombres complexes

$$z = \frac{a + i b}{c + i d} = \frac{r e^{i\theta}}{\rho e^{i\omega}} = \frac{r (\cos \theta + i \sin \theta)}{\rho (\cos \omega + i \sin \omega)} \quad (40)$$

$$z = \frac{a c + b d}{c^2 + d^2} + i \frac{b c - a d}{c^2 + d^2} \quad (41)$$

$$z = \frac{a + i b}{c + i d} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{a c + b d}{c^2 + d^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{b c - a d}{c^2 + d^2} \quad (42)$$

$$z = \frac{r (\cos \theta + i \sin \theta)}{\rho (\cos \omega + i \sin \omega)} = \frac{r}{\rho} (\cos (\theta - \omega) + i \sin (\theta - \omega)) \quad (43)$$

$$z = \frac{r e^{i\theta}}{\rho e^{i\omega}} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta - \omega)} \quad (44)$$

$$z = x + i y = r e^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{r} \quad (45)$$

8. Racines d'un nombre complexe

$$w^n = z = r e^{i\theta} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (46)$$

$$w = \rho e^{i\omega} \quad (47)$$

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*} \quad (48)$$

$$n \omega = \theta + 2 k \pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\theta}{n} + k \frac{2 \pi}{n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* , k \in \mathbb{Z}} \quad (49)$$

Exemple 1 :

$$w = \rho e^{i\omega} \rightarrow w^5 = z = -1 = e^{i\pi} = e^{i5\omega} \quad (50)$$

$$\rho = r = 1 \quad (51)$$

$$\omega = \frac{\pi}{5} + k \frac{2 \pi}{5} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (52)$$

Les images des 5 racines (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) sont positionnées sur un cercle unitaire, avec pour arguments :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{5} \quad , \quad \omega_2 = \frac{3 \pi}{5} \quad , \quad \omega_3 = \pi \quad , \quad \omega_4 = \frac{7 \pi}{5} \quad , \quad \omega_5 = \frac{9 \pi}{5} \quad (53)$$

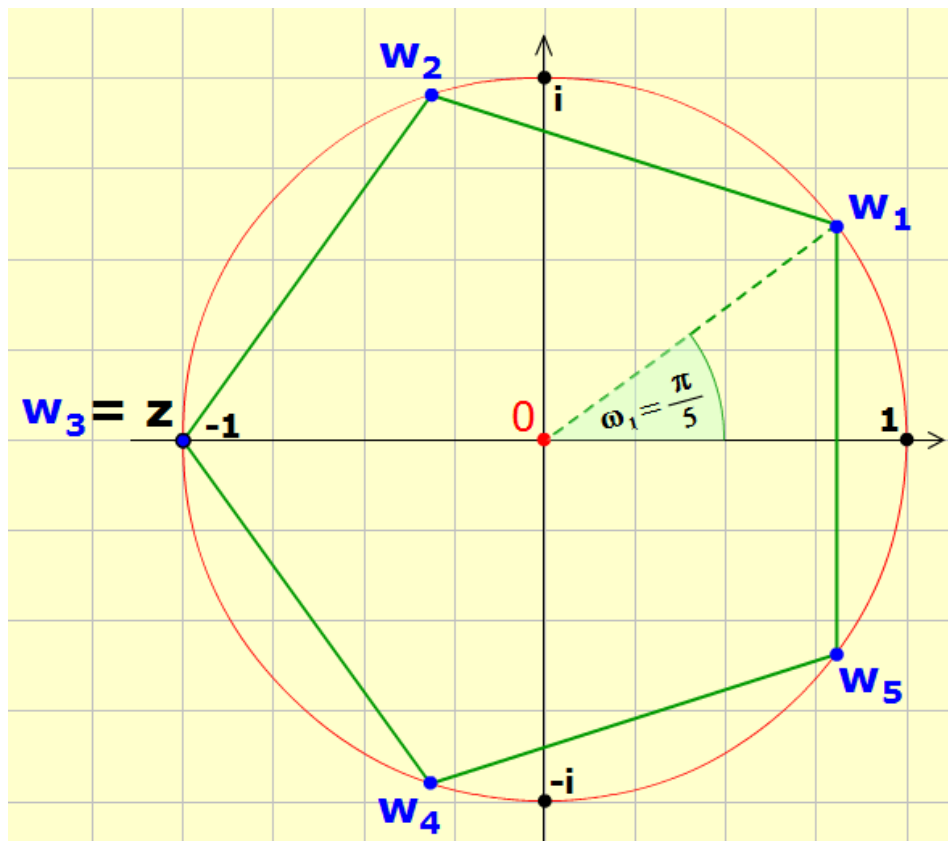


Figure 4

Exemple 2 :

$$z = 3 + 4i = r e^{i\theta} \quad (54)$$

$$\Rightarrow r = |z| = 5 \quad (55)$$

$$\boxed{\rho = \sqrt[2]{5}} \quad , \quad \boxed{\omega_1 = \frac{\theta}{2} \quad , \quad \omega_2 = \frac{\theta}{2} + \pi} \quad (56)$$

$$w = a + ib \Rightarrow \quad (57)$$

$$w^2 = (a + ib)^2 = z = 3 + 4i \quad (58)$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \Rightarrow \quad (59)$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \quad (60)$$

Posons $A = a^2 \Rightarrow A > 0$ et $a = \pm \sqrt[2]{A} \Rightarrow$

$$A^2 - 3A - 4 = 0 \quad (61)$$

$$A = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} A = \cancel{1} \text{ car } A > 0 \\ A = 4 \Rightarrow a = \pm \sqrt{A} = \pm 2 \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} a = 2 &\Rightarrow b = 1 \Rightarrow \boxed{w_1 = 2 + i} \\ a = -2 &\Rightarrow b = -1 \Rightarrow \boxed{w_2 = -2 - i} \end{aligned} \quad (63)$$

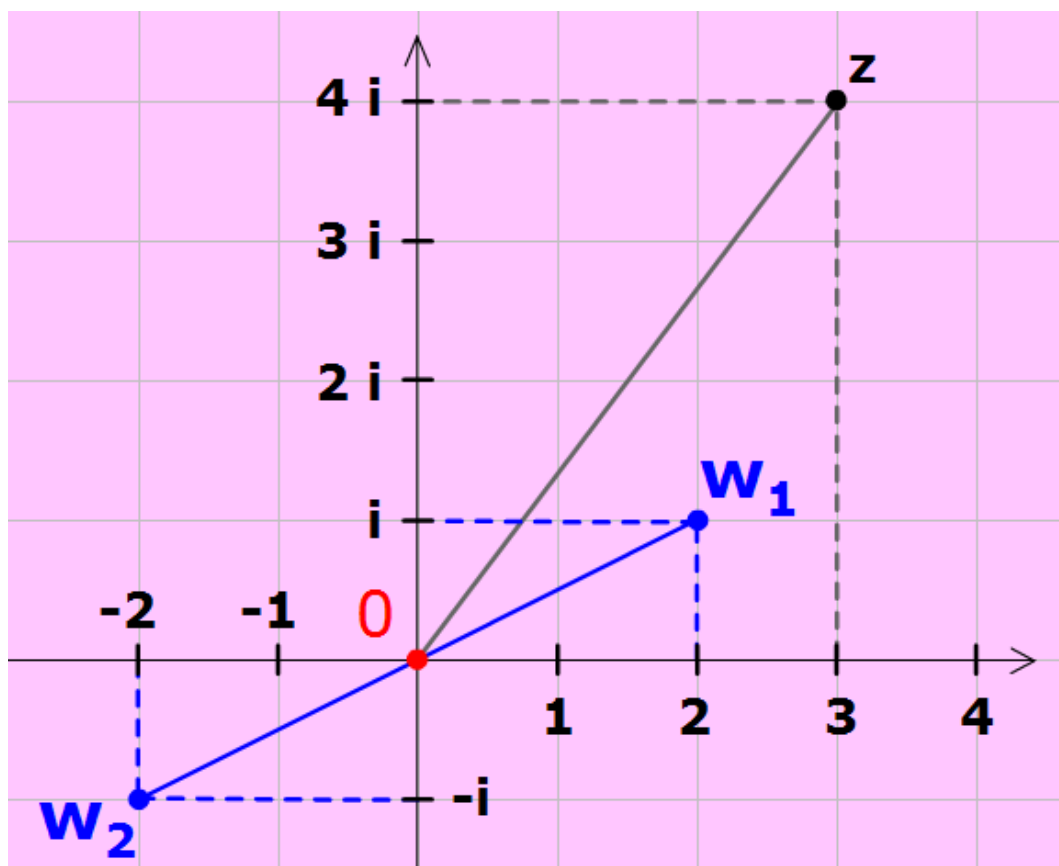


Figure 5

9. Fonction d'une variable complexe

Une fonction de variable complexe est une application f entre 2 plans complexes :

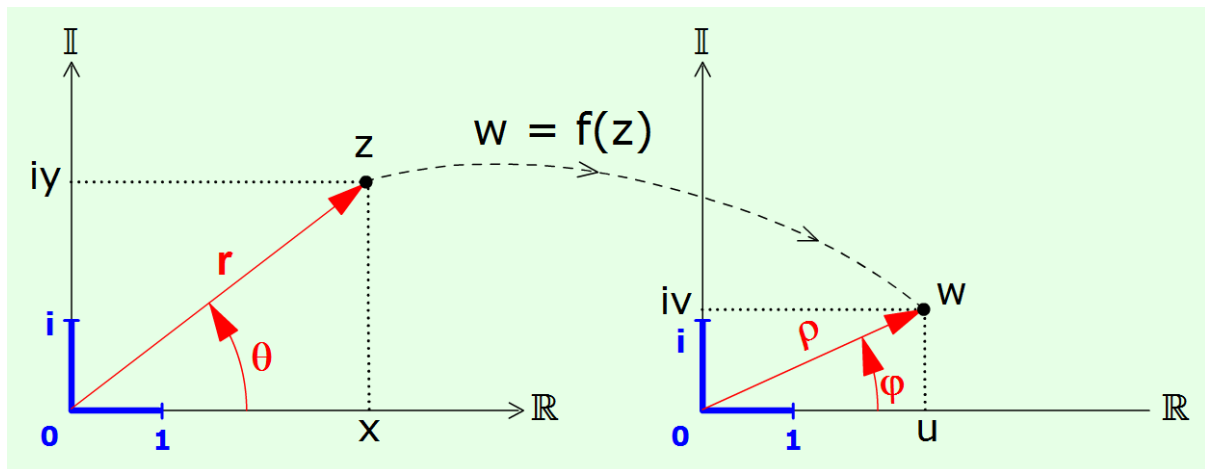


Figure 6

$$z = x + i y = r e^{i\theta} \xrightarrow{f} w = f(z) = u + i v = \rho e^{i\phi} \quad (64)$$

La fonction est analytique dans une zone si elle est continue et dérivable, et pour cela obéir aux conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (65)$$

Ou :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (66)$$

Une fonction uniforme (non-multiforme), continue et analytique dans une zone est qualifiée d'holomorphe.

Une fonction holomorphe dans l'ensemble du plan complexe est qualifiée d'entière.

La transformation ponctuelle associée à une fonction holomorphe est qualifiée de conforme.

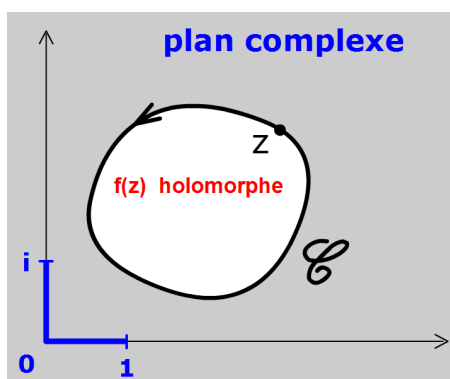
10. Théorème de Cauchy et corollaires

Figure 7 - Théorème de Cauchy

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

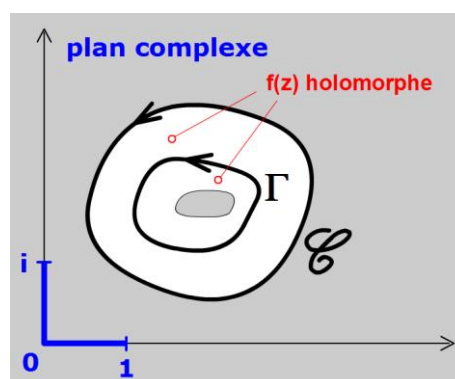


Figure 8 – Premier corollaire

$$\oint_C f(z) dz = \oint_\Gamma f(z) dz \quad (67)$$

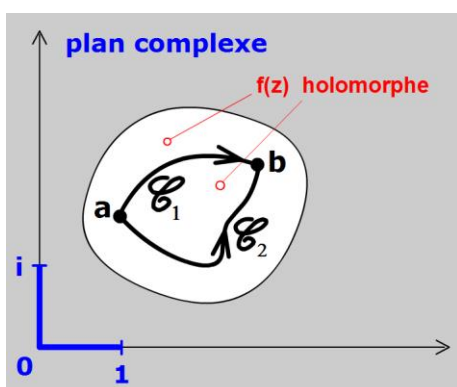


Figure 9 – Deuxième corollaire

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

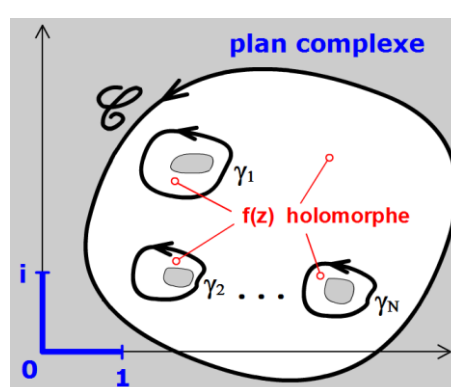


Figure 10 – Troisième corollaire

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{\gamma_k} f(z) dz \quad (68)$$

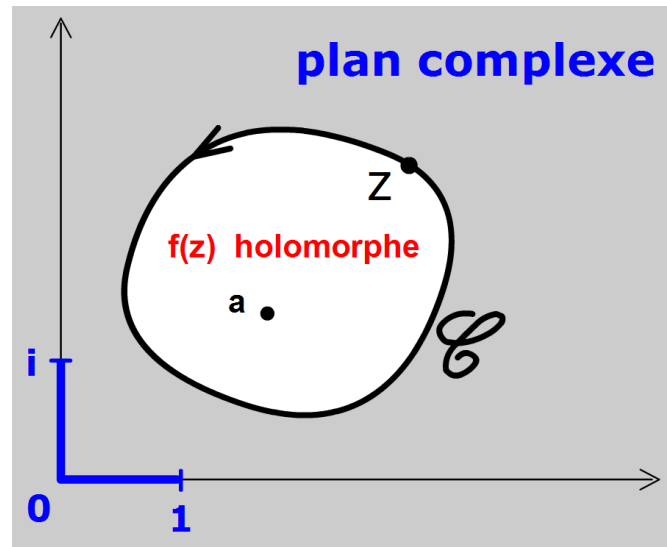
11. Intégrales de Cauchy

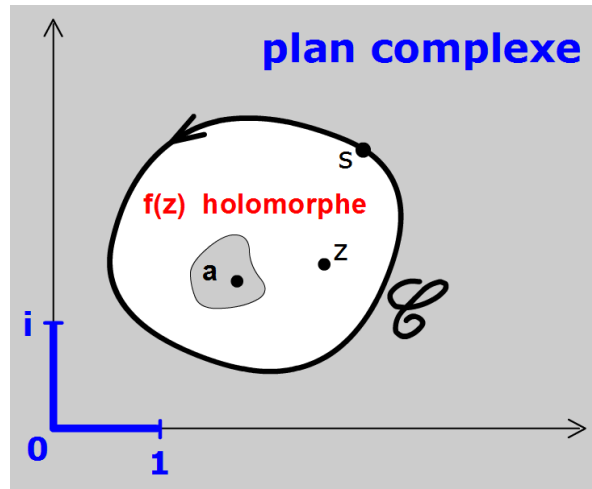
Figure 11 – Intégrales de Cauchy autour de a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (69)$$

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad (70)$$

...

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (71)$$

12. Séries de LaurentFigure 12 – Développement de $f(z)$ autour de d'un point singulier a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (72)$$

Avec :

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds \quad (73)$$

Le point singulier a est "essentiel" si le développement de $f(z)$ autour de a est de la forme :

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (74)$$

Le point singulier a est un "pôle d'ordre p " si le développement est de la forme :

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (75)$$

Le point a est "régulier" ou "point singulier éliminable" si le développement est de la forme :

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (76)$$

13. Théorème des résidus

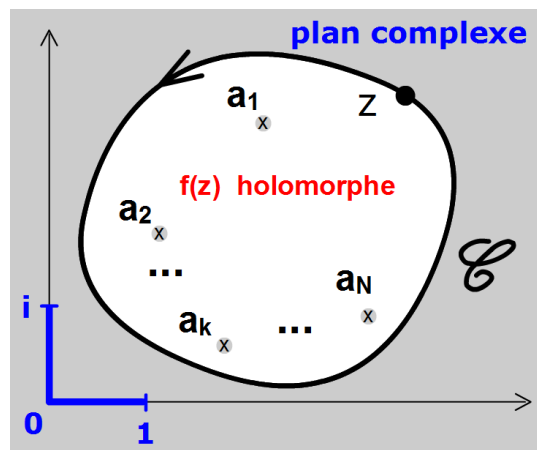


Figure 13 – Intégrales autour de plusieurs points singuliers

Théorème :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^N \text{Rés}(a_k) \quad (77)$$

Le "résidu" $\text{Rés}(a_k) = c_{-1}$: étant le coefficient du développement de Laurent autour d'un point singulier a_k :

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z - a_k)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - a_k)} + c_0 + c_1(z - a_k) + \dots + c_n(z - a_k)^n + \dots \quad (78)$$

Si a est un pôle d'ordre 1 et si $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, avec $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ holomorphes en a le résidu est :

$$\text{Rés}(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad (79)$$

Si a est un pôle d'ordre p :

$$\text{Rés}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left((z - a)^p f(z) \right) \quad (80)$$

Si a est un point singulier essentiel ou un pôle quelconque, à partir de (78) :

$$\text{Rés}(a) = c_{-1} \quad (81)$$

14. Lemmes de Jordan et théorème du pôle simple central

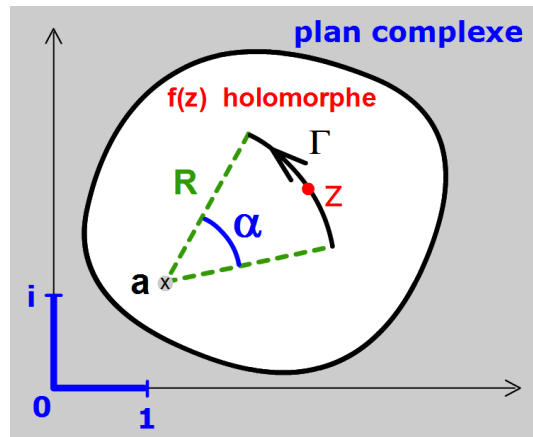


Figure 14 – Arc centré sur un pôle a

Premier lemme de Jordan :

$$\left| (z - a) f(z) \right| \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \quad (82)$$

Deuxième lemme de Jordan :

$$\left| (z - a) f(z) \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (83)$$

Théorème du pôle simple central :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-1}}{(z - a)} + \varphi(z) \quad / \quad \varphi(z) \text{ holomorphe en } a \\ \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= i \alpha \text{ Rés}(a) \end{aligned} \quad (84)$$